Simetrias que dão a volta à cabeça: roteiro de rosáceas

Ricardo Cunha Teixeira

Por estar associada à necessidade de contar, de calcular e de organizar o espaço e as formas, a Matemática é conhecida, em geral, como a ciência da quantidade e do espaço. No entanto, esta é uma definição redutora e incompleta, sobretudo tendo em conta a sua extraordinária evolução ao longo do último século e os muitos ramos que foram surgindo entretanto. Atualmente, "Matemática: a ciência dos padrões" é a definição que reúne maior consenso por parte da comunidade académica. O trabalho do matemático consiste, portanto, em encontrar, estudar e classificar todo o tipo de padrões. Esta tarefa, por vezes árdua, ajuda-nos a compreender melhor a realidade que nos rodeia.

Neste contexto, e regressando novamente ao tema explorado nos últimos artigos, proponho ao leitor que se transforme num verdadeiro detetive à caça de simetrias! A ideia é a de classificar, quanto aos tipos de simetria, os padrões geométricos que encontrar no seu caminho. Ao aceitar este desafio, perceberá melhor como funciona o trabalho de um matemático e a sua preocupação em organizar a informação "por prateleiras", de acordo com determinados critérios estabelecidos previamente. Poderá também saborear o sentimento de harmonia das proporções e da procura por uma ordem, inerente ao conceito de simetria.

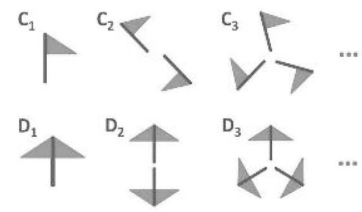
De forma a simplificar a tarefa que nos propomos concretizar, trataremos os exemplos de arte decorativa e ornamental que encontrarmos (pertencentes ao mundo a três dimensões) como se se tratassem de conjuntos de pontos do plano (a duas dimensões). Nas figuras estudadas, deverá haver pelo menos um motivo que se repita. É de realçar que não nos interessa propriamente se esse motivo é uma estrela, uma cobra, um desenho abstrato ou outra coisa qualquer, mas sim o modo como se processa essa repetição. Além disso, para facilitar a sua análise matemática, devemo-nos abstrair de pequenas imperfeições ou irregularidades e considerar apenas duas cores: a cor da figura e a cor de fundo.

Recordemos o conceito matemático de simetria. Uma figura tem uma simetria sempre que um determinado movimento rígido do plano a transforma nela própria, havendo uma sobreposição completa da figura transformada com a figura inicial. O conjunto das simetrias de uma figura chama-se grupo de simetria. Existem quatro tipos de simetria: simetria de reflexão em reta (associada a uma reta, chamada eixo de simetria); simetria de rotação (associada a um ponto, chamado centro de rotação, e a uma determinada amplitude); simetria de translação (associada a um vetor, com uma determinada direção, sentido e comprimento); e simetria de reflexão deslizante (que resulta da composição de uma reflexão em reta com uma translação de vetor paralelo a essa reta). Encontramos diariamente estes quatro tipos de simetria: simetria de reflexão em reta (quando, por exemplo, nos olhamos ao espelho); simetria de rotação (num catavento e nas velas de um moinho); simetria de translação (nos pavimentos e nas varandas); simetria de reflexão deslizante (nas nossas pegadas ao caminharmos descalços na areia).

Neste artigo, apenas nos vamos preocupar com a classificação de figuras que apresentem simetrias de rotação e/ou simetrias de reflexão em reta. Essas figuras chamam-se rosáceas. Prova-se que apenas duas situações podem ocorrer: o seu grupo de simetria é um grupo cíclico Cn (são figuras com n simetrias de rotação) ou um grupo diedral Dn (são figuras com n simetrias de rotação e n simetrias de reflexão em reta). As simetrias de rotação têm todas o mesmo centro e estão associadas a amplitudes de 360º/n e aos seus múltiplos. Os eixos de simetria, quando existem, passam todos pelo centro de rotação. Parece muito complicado, mas não é!

Na prática, apenas é necessário identificar o motivo que se repete em torno do centro de rotação e contar o número de repetições (n). Depois, resta verificar se só há simetrias de rotação (C) ou se também há simetrias de reflexão em reta (D).

ESQUEMA_ROSÁCEAS



Apresentam-se alguns exemplos no esquema. Uma figura com grupo de simetria C1 é considerada assimétrica (desprovida de simetria), uma vez que a única forma de a transformar em si própria é através da rotação trivial de 360º/1=360º (ou, se preferirmos, de 0º). Já uma figura com grupo de simetria D1, para além da rotação trivial, apresenta uma simetria de reflexão em reta. Para o grupo de simetria C2, temos uma simetria de rotação de 360º/2=180º e a rotação de 180º+180º=360º (ou seja, a rotação trivial). Para o grupo D2, há ainda a considerar duas simetrias de reflexão em reta. Por sua vez, o grupo C3 contém as rotações de 360º/3=120º, 120º+120º=240º e 120º+120º+120º=360º. Para o grupo D3, há que acrescentar três simetrias de reflexão em reta. E assim sucessivamente.

Aproveite o roteiro de rosáceas que apresento neste artigo para percorrer as ruas da cidade da Horta e (re)descobrir a simetria escondida debaixo dos seus pés. Se o tempo estiver de chuva, também poderá ficar em casa e observar com atenção toalhas, bordados, tapetes e azulejos. Ficará surpreendido com a quantidade de rosáceas que encontrará!

ROTEIRO DE ROSÁCEAS