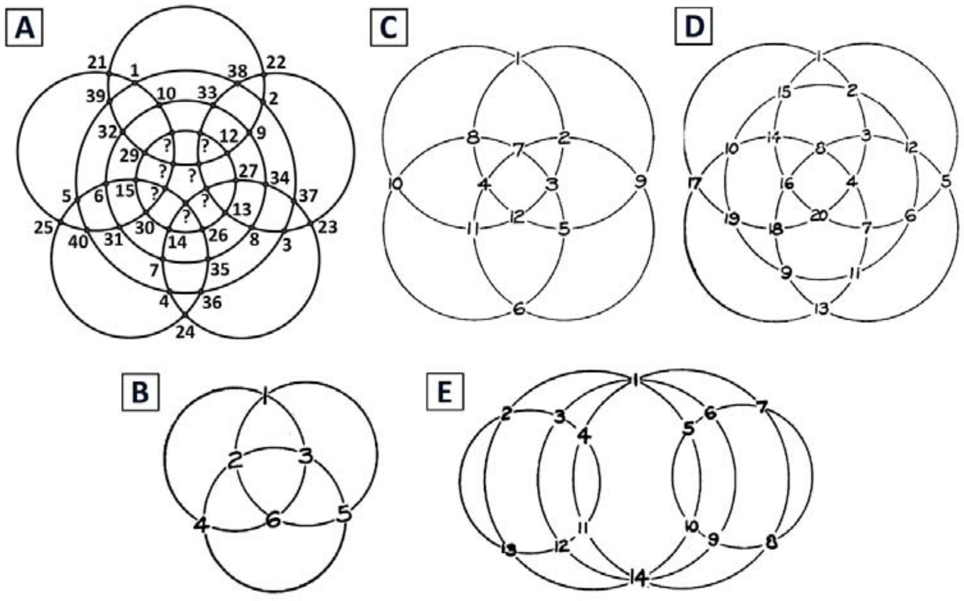
Curiosidades numéricas:

Circunferências mágicas



RICARDO CUNHA TEIXEIRA
Departamento de Matemática da Universidade dos Açores, rteixeira@uac.pt

No seu livro "A Passion for Mathematics", Clifford Alan Pickover apresenta alguns desafios curiosos como é o caso de interessantes circunferências mágicas. No desafio apresentado no último artigo publicado no Atlântico Expresso (Fig. A), a soma dos números de cada circunferência é constante e igual a 205 (dizemos que 205 é a constante mágica). Note-se que temos ao todo 8 circunferências, 3 circunferências concêntricas (com o mesmo centro) e 5 circunferências periféricas. Cada circunferência tem 10 números associados, cuja soma é igual a 205. Por exemplo, para as duas circunferências concêntricas com maior raio obtemos: 1+39+5+40+4+36+3+37+2+38=205 e 10+32+6+31+7+35+8+34+9+33=205. O desafio consiste em tentar encontrar os 7 números em falta de forma a que se obtenha sempre o mesmo valor (205) para a soma dos números das restantes 6 circunferências. De notar que se usam os números de 1 a 40 uma e uma só vez. Recorda-se a solução do desafio da Fig. A (de cima para baixo, da esquerda para a direita): 11, 28, 20, 19, 16, 18 e 17.

A ideia original das circunferências mágicas remonta pelo menos à segunda edição do livro "Magic Squares and Cubes", de W. S. Andrews. A publicação data de 1917, há quase um século, e conta com contributos de diferentes autores. A secção dedicada às circunferências mágicas é da autoria de Harry A. Sayles.

Vejamos outros exemplos de circunferências mágicas analisadas no texto de Harry A. Sayles (Fig. B a Fig. E). Na Fig. B, a constante mágica é igual a 14. De facto, a soma dos quatro números de cada uma das três circunferências é sempre igual a 14: 1+2+6+5=14, 4+6+3+1=14 e 5+3+2+4=14. Observe-se que os números de 1 a 6 são usados uma e uma só vez. De notar outra propriedade curiosa: a soma dos dois números comuns a qualquer par de circunferências é sempre igual a 7, metade de 14 (1 e 6; 4 e 3; 2 e 5). Aliás, esta propriedade está na base da construção das diferentes circunferências mágicas. Veja-se outro exemplo na Fig. C. Os números de 1 a 12 estão distribuídos por quatro circunferências de seis números cada. A constante mágica é igual a 39. Por exemplo, para uma das circunferências tem-se: 1+8+4+12+5+9=39. Os pares de pontos de intersecção desta circunferência com as restantes três apresentam os seguintes números: 1 e 12; 8 e 5; 4 e 9. Ora, 1+12=13, 8+5=13 e 4+9=13! Isto significa que a soma dos números destes pares de pontos é sempre a mesma: 13.

Para cada conjunto de circunferências mágicas, a constante mágica e a soma dos números destes pares de pontos estão relacionadas entre si. No caso do exemplo da Fig. B, com circunferências de quatro números, 14=2x7; para o exemplo da Fig. C, com circunferências de seis números, 39=3x13. Isto significa que a constante mágica é igual ao produto de metade da quantidade de números de cada circunferência pela soma dos números dos pares de pontos obtidos da intersecção de duas quaisquer circunferências. No exemplo da Fig. D, os números de 1 a 20 estão organizados em cinco circunferências de oito números cada e a constante mágica é igual a 84=4x21. Repare-se, que o modo como estes valores se relacionam entre si está dependente da quantidade de números de cada circunferência, logo da forma como as circunferências se intersectam. Por exemplo, na Fig. E temos os números de 1 a 14 organizados em cinco circunferências de seis números cada, com constante mágica igual a 45=3x15.

O leitor provavelmente já encontrou um padrão: quando usamos números de 1 a n, a soma dos números dos pontos de intersecção de duas quaisquer circunferências deve ser n+1. No desafio apresentado na Fig. A usamos os números de 1 a 40, logo a soma dos números dos pontos de intersecção de duas quaisquer circunferências deve ser igual a 41! Além disso, 205=5x41 (cada circunferência tem dez números e 5 é metade de 10). A descoberta da solução do desafio da Fig. A é, agora, imediata. Os 7 números em falta deduzem-se com grande facilidade, tendo em conta esta propriedade. Esta é a grande vantagem da Matemática. Depois de descoberto um padrão, tudo se torna mais claro. O sentimento é o mesmo de um míope quando coloca os óculos na cara: passa a ver a realidade com outra nitidez.