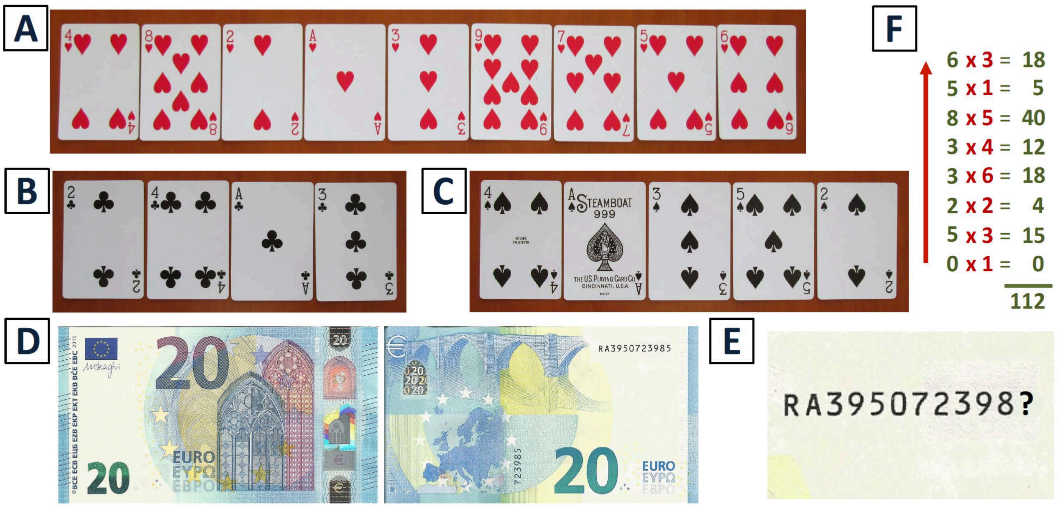
Matemática Recreativa:

Truques com os critérios de divisibilidade

RICARDO CUNHA TEIXEIRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DOS AÇORES, RTEIXEIRA@UAC.PT



Martin Gardner (1914-2010) foi um excelente divulgador de Matemática Recreativa. Durante mais de 25 anos escreveu uma coluna intitulada "Jogos Matemáticos" para a Scientific American, revista americana de divulgação científica. Escreveu também com regularidade para a revista Skeptical Inquirer e foi autor de mais de 70 obras. O seu trabalho inspirou centenas de leitores a apreciar e a querer saber mais sobre o vasto mundo da Matemática. Gardner é conhecido por apresentar interessantes enigmas e desafios matemáticos. Neste texto, analisamos três problemas da sua autoria.

Problema 1: "Nove cartas de um baralho de cartas, com valores diferentes, do um (Ás) ao nove (9), são misturadas dentro de um chapéu. Em seguida, retiram-se as nove cartas, uma a uma, e alinham-se as cartas ao longo de uma fila, à medida que são retiradas, de modo a formar um número com nove algarismos. Qual é a probabilidade de o número obtido ser divisível por 9?" (ver um exemplo na figura A).

Problema 2: "E se repetirmos o mesmo procedimento, mas agora com quatro cartas, com valores diferentes, do um (Ás) ao quatro (4), qual é a probabilidade de o número obtido ser divisível por 3?" (ver um exemplo na figura B).

Problema 3: "Finalmente, se repetirmos o procedimento explicado, utilizando cinco cartas, com valores diferentes, do um (Ás) ao cinco (5), qual é a probabilidade de o número obtido ser divisível por 3?" (ver um exemplo na figura C).

À primeira vista, o leitor pode pensar que a resolução destes problemas requer cálculos muito sofisticados, mas a verdade é que o poder de sistematização da Matemática permite-nos, muitas vezes, ultrapassar com facilidade situações que parecem de difícil resolução.

O segredo para uma rápida resposta a estes problemas reside no conhecimento dos critérios de divisibilidade por 3 e por 9. Aproveitamos, por isso, a oportunidade para rever alguns dos principais critérios de divisibilidade. Como forma de testar a informação que apresentaremos de seguida, o leitor pode socorrer-se de um número com vários algarismos que tenha à mão. Nos exemplos abaixo, utilizaremos o ISBN-13 do livro "Grupos de Simetria: Identificação de Padrões no Património Cultural dos Açores", publicado recentemente pela Associação Ludus e pela Apenas Livros, da autoria conjunta de Ricardo Teixeira, Susana Costa e Vera Moniz. O número é o seguinte: 9 789 896 185 039.

No que se segue, vamos considerar apenas números naturais, ou seja, números inteiros positivos (1, 2, 3, 4, ...). Diz-se que a é divisível por b, que b divide a ou, ainda, que a é um múltiplo de b, se a se obtém adicionando b um determinado número de vezes (por outras palavras, o resto da divisão de a por b é igual a 0). Por exemplo, 12 é divisível por 4, pois 12=4+4+4=3x4.

Critério de divisibilidade por 2: Um número é divisível por 2 se e só se o seu algarismo das unidades for par. Exemplo: 9 789 896 185 039 não é divisível por 2 pois o algarismo das unidades (9) é ímpar.

Critério de divisibilidade por 3: Adicionam-se todos os algarismos de um número. Se o resultado for um número com mais de um algarismo, repete-se o processo, até obter um número com um só algarismo, que se designa por raiz digital do número inicial. Um número é divisível por 3 se e só se a sua raiz digital for 3, 6 ou 9. Exemplo: 9 789 896 185 039 não é divisível por 3 pois, ao adicionarmos todos os seus algarismos, obtemos 82; em seguida, ficamos com 8+2=10 e 1+0=1, pelo que a sua raiz digital é igual a 1.

Critério de divisibilidade por 4: Um número é divisível por 4 se e só se o número formado pelos seus dois últimos algarismos for divisível por 4. Exemplo: 9 789 896 185 039 não é divisível por 4 pois 39 não é divisível por 4 (36=9x4 e 40=10x4).

Critério de divisibilidade por 5: Um número é divisível por 5 se e só se o seu algarismo das unidades for 0 ou 5. Exemplo: 9 789 896 185 039 não é divisível por 5 pois o algarismo das unidades (9) é diferente de 0 e de 5.

Critério de divisibilidade por 6: Um número é divisível por 6 se e só se cumprir em simultâneo os critérios de divisibilidade por 2 e por 3. Exemplo: 9 789 896 185 039 não é divisível por 6 pois não é divisível por 2 (nem por 3).

Critério de divisibilidade por 8: Um número é divisível por 8 se e só se o número formado pelos seus três últimos algarismos for divisível por 8. Exemplo: 9 789 896 185 039 não é divisível por 8 pois 039=39 não é divisível por 8 (32=4x8 e 40=5x8).

Critério de divisibilidade por 9: Um número é divisível por 9 se e só se a sua raiz digital for igual a 9. Exemplo: 9 789 896 185 039 não é divisível por 9 pois a sua raiz digital é igual a 1.

Critério de divisibilidade por 10: Um número é divisível por 10 se e só se o seu algarismo das unidades for 0. Exemplo: 9 789 896 185 039 não é divisível por 10 pois o algarismo das unidades (9) é diferente de 0.

Critério de divisibilidade por 11: Da direita para a esquerda, vamos adicionando e subtraindo alternadamente os algarismos do número a analisar (começando com o algarismo das unidades); um número é divisível por 11 se e só se o resultado final for ainda um número divisível por 11 (..., -22, -11, 0, 11, 22, ...). Exemplo: 9 789 896 185 039 não é divisível por 11 pois 9-3+0-5+8-1+6-9+8-9+8-7+9=14.

Critério de divisibilidade por 12: Um número é divisível por 12 se e só se cumprir em simultâneo os critérios de divisibilidade por 3 e por 4. Exemplo: 9 789 896 185 039 não é divisível por 12 pois não é divisível por 3 (nem por 4).

Por curiosidade, observe-se que 9 789 896 185 039 é um número primo, como tal só é divisível pela unidade e por ele próprio. Daí que a resposta para cada critério de divisibilidade tenha sido sempre negativa.

O conhecimento dos critérios de divisibilidade por 3 e por 9 permite responder em poucas linhas aos três problemas apresentados no início deste artigo.

Problema 1: A probabilidade é de 100%, pois 1+2+...+9=45 e a raiz digital de 45 é 9.

Problema 2: A probabilidade é de 0%, pois 1+2+3+4=10 e a raiz digital de 10 é 1.

Problema 3: A probabilidade é de 100%, pois 1+2+3+4+5=15 e a raiz digital de 15 é 6.

O leitor pode mesmo aproveitar para aplicar estes critérios de divisibilidade e fazer um brilharete junto de familiares e amigos. Por exemplo, pode virar-se de costas e pedir a um amigo que construa uma sequência de 5 cartas, utilizando cartas numeradas do Ás ao 5, pela ordem que bem entender; sem ver a sequência formada, a sua "intuição de mágico" dar-lhe-á a certeza de que o número é divisível por 3! Com alguma criatividade, podemos utilizar outros critérios de divisibilidade para fazer novos truques com cartas igualmente fantásticos.

Outro truque interessante consiste em adivinhar o algarismo das unidades do número de série de uma das novas notas de 20 Euros (figura D). Na verdade, este truque funciona para qualquer nota da nova série Europa, bem como da antiga. A cada letra é associado um valor numérico: A (2); B (3); C (4); D (5); E (6); F (7); G (8); H (9); I (1); J (2); K (3); L (4); M (5); N (6); O (7); P (8); Q (9); R (1); S (2); T (3); U (4); V (5); W (6); X (7); Y (8); Z (9). Basicamente, a ideia é atribuir o valor 2 ao A; o valor 3 ao B; e assim sucessivamente; ao chegar ao 9, volta-se ao 1 para a atribuição dos valores. Substituindo no número de série a(s) letra(s) pelo seu valor numérico, obtemos um número com 12 algarismos. Para ser válido, esse número deve ser divisível por 9, o que equivale a afirmar, pelo critério de divisibilidade por 9, que a sua raiz digital deve ser 9. A título de exemplo, vamos determinar o algarismo das unidades do número de série: RA395072398? (figura E). Substituindo R por 1 e A por 2, ficamos com o número 12395072398?. Se adicionarmos os 11 algarismos conhecidos obtemos o valor 49. Tem-se 4+9=13 e 1+3=4. Assim, para obtermos a raiz digital 9 o algarismo ? em falta deve ser igual a 5, pois 4+5=9.

O 7 é o único número natural, de um só algarismo, que não tem um critério de divisibilidade simples (por isso excluímos o 7 da lista de critérios de divisibilidade). Este facto, que se traduz numa certa "desordem", tem fascinado muitos investigadores em Teoria dos Números. Foram descobertos vários critérios de divisibilidade por 7. Contudo, em termos de consumo de tempo, todos eles apresentam pouco diferença relativamente ao tradicional algoritmo da divisão.

Um dos mais antigos critérios de divisibilidade por 7 consiste em multiplicar os algarismos do número que pretendemos verificar se é divisível por 7 (da direita para a esquerda, começando pelo algarismo das unidades) sucessivamente por 1, 3, 2, 6, 4, 5, repetindo-se esta sequência até percorrermos todos os algarismos do número. Em seguida, adicionam-se os produtos obtidos. O número em causa é divisível por 7 se e só se a soma obtida for divisível por 7. Na figura F, apresenta-se um exemplo em que se comprova que o número 65 833 250 é divisível por 7. Ao aplicarmos o procedimento explicado, obtemos 112=16x7, que é um múltiplo de 7. Em alternativa, podíamos ter aplicado o mesmo procedimento a 112, obtendo: 2x1=2; 1x3=3; 1x2=2; finalmente, adicionando os três valores, ficamos com 2+3+2=7, o que comprova que 112 é divisível por 7 e que, consequentemente, o número inicial também é divisível por 7.