Matemática no quotidiano:

Puzzles geométricos, simetrias e... chocolate!

RICARDO CUNHA TEIXEIRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DOS AÇORES, RTEIXEIRA@UAC.PT

Começamos por apresentar um intrigante puzzle geométrico. Chama-se *Missing Square* e foi desenvolvido em 1953 pelo mágico nova-iorquino Paul Curry. Em Portugal, este puzzle integrou a coleção *Jogos com História*, distribuída pelo Público, da autoria de Carlos Pereira dos Santos, João Pedro Neto e Jorge Nuno Silva.

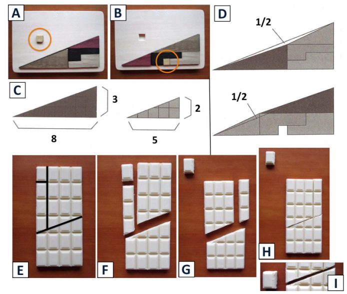
Este quebra-cabeças é composto por quatro peças principais que admitem duas disposições diferentes e por um quadrado utilizado apenas na segunda disposição (A e B). Repare-se que ambas as arrumações parecem ajustar-se ao triângulo retângulo saliente no tabuleiro de madeira (note-se que um *triângulo retângulo* é um triângulo em que dois dos seus lados formam um ângulo reto, ou seja, um ângulo com medida de amplitude de 90 graus; esses lados designam-se por *catetos*, enquanto que o lado que se opõe ao ângulo reto chama-se *hipotenusa*). Em A, as quatro peças parecem sobrepor de forma exata o triângulo retângulo saliente no tabuleiro, enquanto que em B parece ser necessário um quadrado adicional.

Aparentemente, trata-se de algo paradoxal, uma vez que as quatro peças são as mesmas e, por esse motivo, devem ocupar a mesma área. Na verdade, estamos na presença de uma simples ilusão de ótica. Se utilizarmos como unidade de medida o lado do quadrado, podemos calcular os declives das hipotenusas das duas peças em forma de triângulo retângulo (C). A hipotenusa do triângulo mais pequeno tem declive 2/5 e a do maior, 3/8. Esta diferença constitui a chave para a compreensão do problema: em qualquer uma das duas arrumações, as hipotenusas das peças triangulares não estão alinhadas. No entanto, os nossos olhos não detetam essa diferença mínima. A imagem D ilustra a solução para este enigma: as arrumações em A e B não são verdadeiramente triângulos, na medida em que as hipotenusas não são segmentos de reta, mas antes "linhas quebradas".

Calculemos as áreas das diferentes peças. A área do quadrado (lado x lado) vale 1. As duas peças em forma de L obtêm-se da composição de 7 e de 8 quadrados, pelo que as suas áreas são, respetivamente, 7 e 8. Como a área de um triângulo retângulo é igual a metade do produto dos comprimentos dos dois catetos, de acordo com a imagem C, as duas peças triangulares têm áreas iguais a 2x5/2=5 e 3x8/2=12. Ora, ao adicionarmos as áreas das quatro peças principais, chegamos à conclusão que a arrumação de peças em A tem área igual a 32. Se adicionarmos a área do quadrado em madeira, obtemos 33, valor da área da arrumação de peças em B. Por sua vez, se calcularmos a área do triângulo saliente no tabuleiro, obtemos 5x13/2=32,5. Ora, a diferença entre as áreas das duas configurações e a área do triângulo saliente no tabuleiro é mínima (1/2=0,5), como se ilustra em D, o que passa despercebido aos nossos olhos.

Recentemente, tem circulado na Web um truque com uma tablete de chocolate, que se baseia no mesmo tipo de ilusão de ótica do *Missing Square*. O "truque do chocolate infinito" (https://youtu.be/1ozW0Ow1AZ0) apresenta, ao que parece, a fórmula secreta ideal para os mais gulosos: como retirar um quadradinho de um tablete de chocolate, deixando-a ficar exatamente igual ao que estava no início!

Vejamos em que consiste este truque. Deve-se cortar uma tablete 4 por 6, de acordo com os cortes assinalados em E. Em seguida, reorganizam-se as partes cortadas de forma a que a tablete continue a ter a configuração de 4 por 6, deixando-se um quadradinho de fora (F a H). Que fantástico! Foi possível retirar um quadradinho de chocolate, mantendo a tablete inalterada! Podemos, então, repetir este processo por toda a eternidade e nunca



nos faltará chocolate! Será mesmo assim?

Mais uma vez, trata-se de uma ilusão de ótica pois a área do quadradinho retirado corresponde à área da região indicada na imagem I, que está em falta no final do processo de corte e rearranjo das partes da tablete, pormenor que passa despercebido aos olhares menos atentos.

Mas existem outras formas de apreciar o chocolate, para além do recurso ao paladar ou a puzzles geométricos. A exploração das simetrias que encontramos em muitos bombons de chocolate também pode constituir uma atividade altamente motivadora. Analisamos, de seguida, as simetrias de alguns bombons de uma conhecida marca regional. Segue-se a lista de sabores: laranja (J); caramelo de beterraba (K); malagueta (L); frutos vermelhos (M); ananás dos Açores (N); pimenta da terra (O); noz e baunilha (P); capuchino (Q); torrão de amendoim (R); coco (S); e doce de leite (T). Agradecemos, desde já a disponibilidade e simpatia do Tiago Alves, sócio-gerente da *Alves Devine – O Chocolatinho* (http://www.ochocolatinho.pt).

Vamos analisar as simetrias dos bombons como se fossem figuras do plano. Todos eles são exemplos de *rosáceas* – figuras do plano que apresentam apenas simetrias de rotação e, em alguns casos, simetrias de reflexão (simetrias de espelho). Note-se que a rotação trivial de 360 graus (ou, se preferirmos, de 0 graus) é uma simetria de qualquer figura (porque a deixa invariante). Passamos a analisar as restantes simetrias dos onze bombons. Os primeiros cinco bombons (J-N) têm um eixo de simetria vertical. Por exemplo, ao colocarmos um espelho perpendicular à página do jornal, de modo a que a borda do espelho assente na reta vertical desenhada em K, verificamos que cada lado da figura é, de facto, um reflexo do outro. Já os três bombons que se seguem (O, P e Q) não têm eixos de simetria, mas apresentam em contrapartida uma simetria de meia-volta. De facto, se imaginarmos estas figuras "de pernas para o ar" (ou seja, se as rodarmos 360/2=180 graus em torno do seu centro), a sua configuração não se altera. Por sua vez, o bombom de torrão de amendoim (R) apresenta simetrias de rotação de 360/3=120 graus e dos seus múltiplos (120+120=240 e 120+120+120=360). Isto significa que se rodarmos o bombom em torno do seu centro segundo uma dessas amplitudes, a figura obtida sobrepõe-se por completo à inicial. Segue-se o bombom de coco (S), com uma simetria de meia-volta e duas simetrias de reflexão de eixos perpendiculares (um eixo vertical e outro horizontal que passam pelo centro da figura). Por fim, o bombom de doce de leite (T) tem 8 simetrias de rotação, com amplitude de 360/8=45 graus e dos seus múltiplos, e 8 simetrias de reflexão (todos os eixos de simetria passam pelo centro; 4 desses eixos separam pétalas consecutivas; os restantes 4 cortam pétalas opostas ao meio).

Afinal o chocolate encerra mais maravilhas do que à primeira vista poderíamos pensar!