Critérios de divisibilidade por 7 e por 11

Ricardo Cunha Teixeira

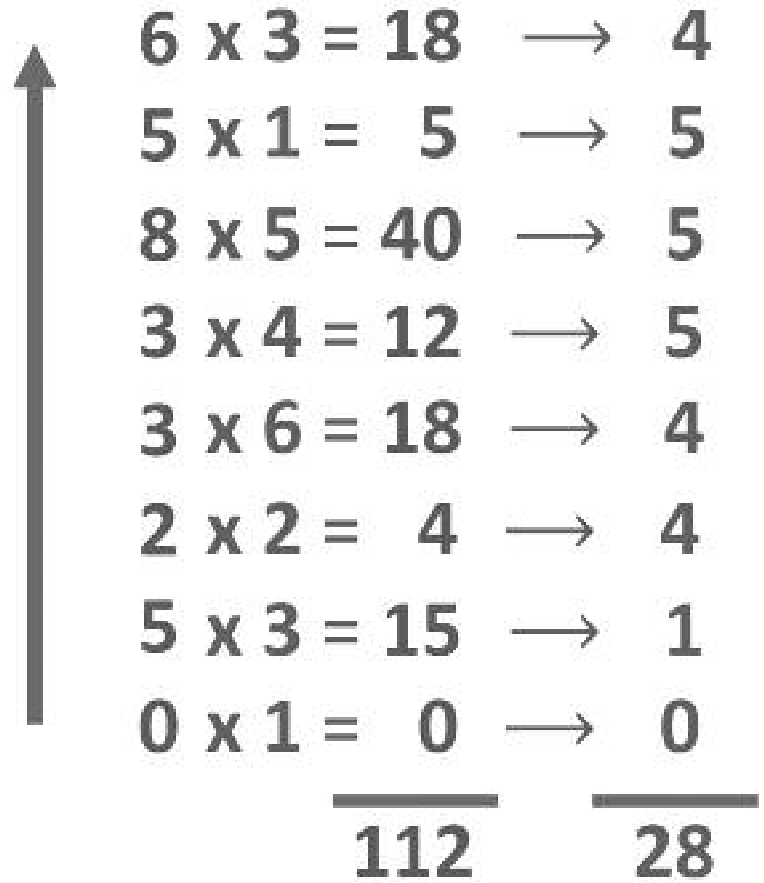
No artigo publicado no Tribuna das Ilhas no passado dia 15 de maio, exploraram-se alguns dos critérios de divisibilidade mais conhecidos. De fora ficaram os critérios de divisibilidade por 7 e por 11, por apresentarem características próprias que justificam um novo artigo dedicado a esses critérios.

Recordamos que um número natural é um número inteiro positivo (1, 2, 3, 4, ...). Dizemos que um número natural é divisível por outro se, ao ser dividido por esse número, o resto for zero. Quando um número é divisível por outro, ele é múltiplo desse número (obtém-se adicionando várias vezes esse número). Por exemplo, 28 é divisível por 7, tendo-se 28=7+7+7+7=4x7. O poder de sistematização da Matemática volta a estar em evidência, uma vez que é possível representar todos os múltiplos inteiros de um determinado número natural numa única expressão. Por exemplo, os múltiplos de 7 são da forma 7k, sendo k um número inteiro (k= ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...). Por outras palavras, ao atribuir valores inteiros a k, obtemos os diferentes múltiplos de 7 (..., -28, -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, 28, ...).

O 7 é o único número natural, de um só algarismo, que não tem um critério de divisibilidade simples. Este facto, que se traduz numa certa “desordem”, tem fascinado muitos investigadores em Teoria dos Números. Foram descobertos vários critérios de divisibilidade por 7. Contudo, em termos de consumo de tempo, todos eles apresentam pouco diferença relativamente ao tradicional algoritmo da divisão. Convém não esquecer que a utilização de um critério de divisibilidade visa essencialmente averiguar a divisibilidade de um número por outro de forma expedita.

Um dos mais antigos critérios de divisibilidade por 7 consiste em multiplicar os algarismos do número que pretendemos verificar se é divisível por 7 (da direita para a esquerda, começando pelo algarismo das unidades) sucessivamente por 1, 3, 2, 6, 4, 5, repetindo-se esta sequência de multiplicadores até percorrermos todos os algarismos do número. Em seguida, adicionam-se os produtos obtidos. O número em causa é divisível por 7 se e só se a soma obtida for um múltiplo de 7. Mais ainda, o resto da divisão do número por 7 coincide com o resto da divisão dessa soma por 7. Na figura, apresenta-se um exemplo em que se comprova que o número 65 833 250 é divisível por 7. Ao aplicar o procedimento explicado, obtemos 112=16x7, que é um múltiplo de 7. Em alternativa, podíamos aplicar o mesmo procedimento a 112, obtendo: 2x1=2; 1x3=3; 1x2=2; finalmente, adicionando os três valores, ficamos com 2+3+2=7, o que comprova que 112 é divisível por 7 e que, consequentemente, o número inicial também é divisível por 7. O procedimento explicado pode ser simplificado se formos “retirando setes”, sempre que possível (como está ilustrado na figura). Nesse caso, obtemos 28=4x7, novamente um múltiplo de 7.

Este critério de divisibilidade deriva do facto de as sucessivas potências de base 10 serem congruentes módulo 7 com 1, 3, 2, 6, 4, 5; 1, 3, 2, 6, 4, 5; ... (significa que as sucessivas potências de base 10 apresentam estes restos quando divididas por 7). De notar que as potências de base 10 são da forma: 10^0=1; 10^1=10; 10^2=10x10=100; 10^3=10x10x10=1000; ... Além disso, podemos escrever qualquer número (na base 10) utilizando estas potências. Por exemplo, 259=2x100+5x10+9x1. Ora, para averiguarmos se 259 é divisível por 7, podemos substituir na expressão anterior as potências de base 10 pelos seus restos da divisão por 7 (na verdade, podemos substituir uma potência de base 10 por qualquer número que seja congruente com essa potência módulo 7, ou seja, que tenha o mesmo resto quando dividido por 7). Obtemos a expressão: 2x2+5x3+9x1 (pois 2, 3 e 1 são os restos da divisão de, respetivamente, 100, 10 e 1 por 7). E, assim, se explica este critério de divisibilidade (no exemplo, ficamos com 4+15+9=28, pelo que 259 é divisível por 7).



Este tipo de raciocínio está na base de outros critérios de divisibilidade. Por exemplo, para o critério de divisibilidade por 9 (talvez o mais famoso de todos os critérios de divisibilidade), como o resto da divisão de qualquer potência de base 10 por 9 é igual a 1, para verificarmos se um número é divisível por 9 basta adicionarmos os seus algarismos e averiguarmos se a soma obtida é ainda um múltiplo de nove. Utilizando o mesmo exemplo (259=2x100+5x10+9x1) e substituindo as potências de base 10 pelos seus restos da divisão por 9, obtemos 2x1+5x1+9x1=2+5+9=16. E, assim, se comprova que este número não é divisível por 9, pois 16 não é divisível por 9.

Podemos aplicar este tipo de raciocínio para obter critérios de divisibilidade para outros números. Vejamos o que acontece com o número 11. Como as potências de base 10 são congruentes módulo 11 com a sequência 1, -1, 1, -1, ..., obtemos um conhecido critério de divisibilidade por 11: da direita para a esquerda, vamos adicionando e subtraindo alternadamente os algarismos do número a analisar (começando com o algarismo das unidades); o resultado obtido deverá ser um múltiplo de 11. Por exemplo, será que o número 259 é divisível por 11? Tem-se 9-5+2=6; como 6 não é um múltiplo de 11, então também 259 não é um múltiplo de 11. Vejamos outro exemplo: será que 104 302 é um múltiplo de 11? Tem-se 2-0+3-4+0-1=0. Como 0 é um múltiplo de 11, também 104 302 é um múltiplo de 11.

Terminamos com outro critério de divisibilidade por 7, bastante curioso. Este critério é apresentado num artigo de D. Spence, publicado em 1956, na revista *The Mathematical Gazette*. Pensa-se que a sua origem remonta a 1861, sendo da autoria de A. Zbikovski. A ideia é simples: remove-se o algarismo das unidades do número a estudar; subtrai-se o dobro do algarismo das unidades do novo número obtido; repete-se este procedimento até ficarmos com um número de um só algarismo. O número inicial é um múltiplo de 7 se e só se o valor obtido for 0 ou 7. Por exemplo, considere-se o 259. Tem-se 25-2x9=7; logo, 259 é divisível por 7. Outro exemplo: será 6481 divisível por 7? Tem-se: 648-2x1=646; 64-2x6=52; 5-2x2=1; logo, 6481 não é divisível por 7.

Podemos considerar um critério de divisibilidade análogo para o 11; a única diferença é que subtraímos apenas o algarismo das unidades e não o seu dobro. No final, devemos obter 0. Por exemplo, 104 302 é divisível por 11, pois 10 430-2=10 428; 1042-8=1034; 103-4=99; 9-9=0.

Departamento de Matemática da Universidade dos Açores,
rteixeira@uac.pt