Curiosidades numéricas:
Quadrados mágicos divertidos

RICARDO CUNHA TEIXEIRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DOS AÇORES, RTEIXEIRA@UAC.PT

Regressamos ao tema dos quadrados mágicos. Um *quadrado mágico de ordem* N é uma tabela quadrangular NxN, com N linhas e N colunas, sendo N um determinado número natural maior ou igual a 3. A tabela deve ser preenchida com números inteiros de forma a que a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada uma das duas diagonais do quadrado seja sempre a mesma. Esse valor chama-se *constante mágica*.

Se os números utilizados na construção de um quadrado mágico de ordem N forem os primeiros NxN números naturais (usam-se todos os números, do 1 ao NxN, sem repetição de qualquer número), diz-se que esse quadrado é *puro* e a sua constante mágica é dada por N(NxN+1)/2. Existem quadrados mágicos igualmente interessantes que não satisfazem esta regra (por exemplo, quando se repetem números ou quando se utilizam números superiores a NxN).

Vejamos alguns quadrados mágicos curiosos. Começamos pelo Quadrado Mágico do Aniversariante (figura A). Se o leitor fizer as contas, verificará que a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada uma das duas diagonais do quadrado é sempre 22. Este é, portanto, um quadrado mágico ideal para quem faz 22 anos. Contudo, a sua utilização é muito mais flexível do que à primeira vista se possa pensar. Isto porque também é possível utilizar este quadrado mágico para felicitar um amigo que celebre outra idade qualquer (se não quisermos utilizar números negativos ou o zero no preenchimento das casas do quadrado mágico, devemos escolher um amigo que celebre uma idade igual ou superior a 22 anos). Para obter um quadrado mágico com constante mágica igual a x, com x>22, basta adicionar o valor x-22 a cada um dos números das quatro casas assinaladas a branco na figura A.

Por exemplo, imagine-se que o seu amigo tem 40 anos e que quer personalizar o postal de aniversário que lhe vai oferecer com um quadrado de constante mágica igual a 40. Apenas é necessário alterar quatro números do quadrado mágico da figura A: os quatro números que estão nas casas assinaladas a branco. Deve-se proceder da seguinte forma: calcula-se a diferença 40-22=18 e adiciona-se esse valor a cada um dos números localizados nas casas brancas. Na primeira linha, obtém-se 1+18=19; na segunda linha, 4+18=22; na terceira, 2+18=20; e, por fim, na última linha, 3+18=21. O novo quadrado mágico obtido por este processo tem constante mágica igual a 40! De facto, a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada uma das duas diagonais do novo quadrado passa a ser igual a 40 (figura B).

Atribui-se a Martin Gardner (1914-2010), conhecido divulgador de Matemática Recreativa, a ideia de construir quadrados mágicos com estas características. Seguem-se mais algumas curiosidades sobre o Quadrado Mágico do Aniversariante. De notar que os 12 números das casas coloridas não se repetem: utilizam-se todos os números, do 1 ao 12, uma e uma só vez. De acordo com a fórmula que se recordou no início deste artigo, um quadrado mágico puro de ordem N=4 tem constante mágica igual a N(NxN+1)/2 = 4(4x4+1)/2 = 34. Se partirmos do quadrado da figura A e se adicionarmos 12 unidades aos números das casas brancas, obtemos um quadrado mágico puro (a constante mágica é igual a 34, utilizando-se na construção do quadrado todos os números naturais, do 1 ao 16, uma e uma só vez). Por outras palavras, os aniversariantes com 34 anos são presenteados com um quadrado mágico puro!

Para qualquer quadrado mágico que se construa pelo processo referido, é possível obter a constante mágica, ou seja, a idade do aniversariante, através de outras combinações de quatro números, que não as tradicionais: a figura C ilustra alguns exemplos (se adicionarmos os números de quatro casas marcadas com a mesma cor, obtemos sempre a constante mágica). Este pode ser um desafio engraçado para apresentar ao aniversariante: tentar encontrar todas as combinações possíveis de quatro números do quadrado cuja soma coincida com a constante mágica (que é igual à idade que está a celebrar)!

Na figura D, apresenta-se outro exemplo curioso: o Quadrado Mágico do 69. Este quadrado aparece no livro "Self-working Number Magic", de Karl Fulves, publicado em 1983 pela Dover Publications. Para começar, o leitor pode confirmar que a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada uma das duas diagonais do quadrado é igual a 264. Também é possível obter o valor da constante mágica ao adicionar: os números de qualquer subquadrado 2x2; os números dos cantos de qualquer subquadrado 3x3; e os números dos cantos do quadrado principal. Todas estas somas de quatro números do quadrado da figura D coincidem com o valor da constante mágica: 264.

Uma observação atenta a cada linha, coluna ou diagonal deste quadrado permite concluir que, em cada uma dessas filas, são utilizados os mesmos algarismos: 1, 6, 8 e 9. Um olhar ainda mais atento permite detetar duas ocorrências de cada um desses algarismos por fila. Podemos ainda pensar noutro tipo de exercício: em cada fila do quadrado, adicionar apenas os algarismos das unidades ou apenas os algarismos das dezenas dos números dessa fila. Em ambos os casos, obtemos sempre o mesmo valor 24. Por exemplo, em relação à primeira linha, temos: 8+9+6+1=24 e 1+9+8+6 = 24. Na verdade, obtemos somas sempre com as mesmas quatro parcelas: 1, 6, 8 e 9.

Mas, o interesse do quadrado mágico da figura D não se fica por aqui. Se o leitor virar a folha de jornal "de pernas para o ar" (aplicando uma meia-volta), ficará agradavelmente surpreendido: obtém-se um novo quadrado mágico com a mesma constante mágica (a soma dos números de cada linha, coluna e diagonal continua a ser 264). Outro exercício interessante consiste em colocar esta página do jornal em frente a um espelho e ler a reflexão que se obtém do quadrado mágico da figura D (apenas há que ter algum cuidado na identificação dos algarismos 6 e 9, que aparecerão escritos de forma espelhada). Será que obtemos um novo quadrado mágico com a mesma constante mágica?

Clifford Pickover, conhecido divulgador da Ciência e da Matemática, também é adepto de quadrados mágicos. No seu livro "A Passion for Mathematics", publicado em 2005 pela John Wiley & Sons, o autor apresenta-nos alguns exemplos interessantes de quadrados mágicos. Um deles é muito semelhante ao que acabamos de apresentar. O Quadrado Mágico do 8811 (figura E) tem constante mágica igual a 19 998, independentemente de o analisarmos como é apresentado, de o rodarmos 180 graus em torno do seu centro (ou seja, de o estudarmos de "pernas para o ar") ou de o lermos refletido num espelho. A constante mágica também pode ser obtida adicionando os quatro números dos cantos do quadrado ou adicionando os quatro números de qualquer subquadrado 2x2. Divirta-se a descobrir padrões numéricos neste quadrado mágico!

Existem outros exemplos curiosos, como os *quadrados mágicos aniquiladores* e os *quadrados antimágicos*.

Num quadrado mágico aniquilador de ordem N (N deve ser um número par), a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada uma das duas diagonais deve ser sempre igual a zero. No seu preenchimento, utilizam-se os números inteiros, do –NxN/2 ao NxN/2, excepto o 0, uma e uma só vez. Veja-se o exemplo da figura F, um quadrado mágico de ordem 4, em que se utilizam os números, do -8 ao -1 e do 1 ao 8, uma e uma só vez.

Em relação aos quadrados antimágicos, as suas linhas, colunas e diagonais devem gerar somas diferentes umas das outras, formando uma sequência de números inteiros consecutivos. No exemplo da figura G, as somas em causa formam a sequência de inteiros consecutivos, do 29 ao 38. Neste quadrado, utilizam-se todos os números, do 1 ao 4x4=16, uma e uma só vez.

O mundo dos quadrados mágicos é muito vasto, constituindo um campo fértil de descoberta de padrões numéricos onde a imaginação não tem limites.