

Curiosidades numéricas:

A Matemática do Sudoku



RICARDO CUNHA TEIXEIRA
Departamento de Matemática da Universidade
dos Açores, rteixeira@uaç.pt

Um dos fenômenos mais curiosos do ano de 2005, que não deve ter passado despercebido ao leitor, foi o aparecimento generalizado do Sudoku. Os jornais começaram a incluir este quebra-cabeças ao lado dos horóscopos e das habituais palavras cruzadas.

Recordamos, em primeiro lugar, a estrutura de um desafio clássico de Sudoku, que se apresenta normalmente sob a forma de um quadrado 9x9, formado por 9 subquadrados 3x3 contornados a negrito (que se designam por regiões). Algumas casas contêm algarismos impressos. As restantes estão em branco e devem ser preenchidas de acordo com duas regras: a) Em cada linha e em cada coluna, os nove algarismos, do 1 ao 9, devem aparecer uma e uma só vez; b) Em cada região 3x3, os nove algarismos, do 1 ao 9, também devem aparecer uma e uma só vez. Na Figura 1, vemos a preto um desafio de Sudoku com as soluções marcadas a outra cor. Para quem experimeta, trata-se de um quebra-cabeças altamente viciante!

O Sudoku, na sua versão original, foi inventado por Howard Garns, um arquiteto aposentado do estado de Indiana, nos EUA, e criador independente de puzzles. As primeiras publicações do Sudoku ocorreram nos Estados Unidos da América no final dos anos 70 do século passado, na revista norte-americana *Math Puzzles and Logic Problems*, da editora Dell Magazines, especializada em desafios e quebra-cabeças. Nessa publicação, o desafio recebeu o nome de "Number Place", designação que ainda hoje é utilizada nos EUA.

MakiKaji, um criador de puzzles japonês, estava entediado a pesquisar revistas de puzzles americanas, que continham numerosos puzzles de palavras, incompreensíveis para quem não lê inglês, até que se separou com uma curiosa grelha 9x9 preenchida parcialmente com números: o "Number Place"! Sendo a Matemática uma linguagem universal, este puzzle chamou imediatamente a atenção de Kaji, que o adaptou de forma a que a distribuição inicial dos algarismos se aproximasse mais do formato das tradicionais palavras cruzadas. A Nikoli, empresa japonesa de jogos presidida por Maki Kaji, começou a publicar este puzzle no Japão, inicialmente sem grande sucesso. Em terras nipônicas, este puzzle sofreu uma alteração na sua designação: o nome Sudoku surgiu como forma de abreviar uma frase em japonês que, traduzida, significa "os dígitos devem permanecer únicos". Nos anos que se seguiram, foram implementados alguns aperfeiçoamentos na aplicação de diferentes níveis de dificuldade.

Tal como um japonês sem conhecimentos de inglês pôde interessar-se pelo "Number Place", também um nativo da Nova Zelândia, cujo idio-

1

8	9	3	5	6	2	7	1	4
7	6	4	3	9	1	2	8	5
1	5	2	4	8	7	9	3	6
2	1	7	6	3	4	5	9	8
5	4	8	2	7	9	3	6	1
6	3	9	1	5	8	4	7	2
3	2	1	7	4	6	8	5	9
9	7	6	8	2	5	1	4	3
4	8	5	9	1	3	6	2	7

2

A		R	T	E				
					A	I		
F	G	N	I				R	
E	A	F	S					
T	N	I			S	F	E	
		I	T	N	G			
N			R		T	S	F	
R	E							
		N	A	G				I



ma predominante é o inglês, sem conhecimentos de japonês, pôde entusiasmar-se pelo Sudoku. Foi o que aconteceu com Wayne Gould, um juiz aposentado de Hong Kong. Ao entrar numa livraria de Tóquio, em 1997, os seus olhos detetaram algo familiar: um puzzle com números! Gould comprou o livro com o puzzle e levou-o consigo para umas férias no sul de Itália. Gostou tanto de o resolver que decidiu criar um programa de computador para gerar jogos de Sudoku com vários níveis de dificuldade. Anos mais tarde, em 2004, Gould convenceu os editores do jornal *The Times*, em Londres, a publicar desafios de Sudoku. O primeiro Sudoku foi publicado a 12 de novembro de 2004. Esta publicação constituiu o marco decisivo que despoletou toda a popularidade deste quebra-cabeças no mundo ocidental. De notar o aumento muito significativo na venda de lápis que se registou no Reino Unido em 2005. Até ao final desse ano, desafios de Sudoku alastraram-se a cerca de 30 países! A revista norte-americana *Time* nomeou Wayne Gould uma das 100 personalidades que mais marcou o mundo em 2005.

Mas terá o Sudoku alguma Matemática? À primeira vista, o leitor pode pensar que a resposta é afirmativa, tendo em conta que, num desafio de Sudoku, utilizam-se os primeiros nove números naturais, do 1 ao 9. E se tem números é porque tem Matemática! A verdade é que nem tudo o que tem números é Matemática. Além disso, a dinâmica e interesse do Sudoku não está propriamente

na utilização de números. Os números estão no Sudoku apenas porque são 9 símbolos que estamos muito habituados a reconhecer e a distinguir e não porque cumprem qualquer função matemática na resolução deste quebra-cabeças. As estratégias utilizadas na resolução de um problema de Sudoku assentam essencialmente na lógica e na eliminação de possibilidades. Podemos mesmo substituir cada um dos números, do 1 ao 9, por quaisquer outros símbolos, por exemplo por nove letras do alfabeto, obtendo exatamente o mesmo tipo de problema na sua essência. A título de exemplo, veja-se o desafio de Sudoku da Figura 2, em que os habituais algarismos foram substituídos pelas letras A, E, F, G, I, N, R, S e T. E quem utiliza letras, pode utilizar outros símbolos quaisquer.

A este propósito, apresento um exemplo muito interessante de um desafio de Sudoku adaptado para o Pré-Escolar, para ser resolvido por crianças a partir dos 4 anos (Figura 3). Utilizam-se apenas 4 símbolos (peças de vestuário), que devem ser colocados nas casas do quadrado 4x4, obedecendo às seguintes regras: a) Em cada linha e em cada coluna, os quatro símbolos devem aparecer uma e uma só vez; b) Em cada região 2x2, os quatro símbolos também devem aparecer uma e uma só vez. Este Sudoku é da autoria de Sandra Couto Moura e foi desenvolvido no âmbito da unidade curricular "Fundamentos e Aplicações da Matemática Elementar", do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do

Ensino Básico da Universidade dos Açores. Na figura 4, apresenta-se a solução. Esta atividade inseriu-se no módulo do Pré-Escolar da referida disciplina, em que se explorou vários aspetos do Método de Singapura, um método de ensino da Matemática bem-sucedido e com provas dadas em vários países.

Tendo em conta os exemplos apresentados, concluímos que a Matemática do Sudoku não tem a ver com os números, do 1 ao 9, que normalmente são utilizados neste tipo de desafios. Então onde está a Matemática do Sudoku?

A estrutura deste quebra-cabeças baseia-se num quadrado, com n linhas e n colunas, que deve ser preenchido com n símbolos diferentes em que cada símbolo aparece uma e uma só vez em cada linha e cada coluna. Este tipo de estrutura tem um nome em Matemática. Chama-se *quadrado latino* e é estudado em diversas áreas da Matemática, como na Álgebra. Alguns conceitos que estão associados são o de grupo, o de quase-grupo e o de permutação. No livro "O fim do mundo está próximo?", publicado pela Gradiva em 2007, Jorge Buescu, conhecido autor de vários livros de divulgação da Matemática, que já esteve nos Açores a propósito de alguns eventos organizados pelo Departamento de Matemática da Universidade dos Açores, explica-nos um pouco mais da história dos quadrados latinos e de quem terá definido pela primeira vez um quadrado latino, um dos maiores matemáticos de todos os tempos, de nome Leonhard Euler (1707-1783).

Completar um puzzle é sempre gratificante para o nosso ego, mas parte do fascínio do Sudoku assenta na beleza e equilíbrio de um quadrado latino: em cada linha e em cada coluna, os algarismos, do 1 ao 9, figuram uma e uma só vez. E quantos quadrados latinos 9x9 existem? A resposta é um número gigantesco com 28 algarismos! Destes, há que considerar apenas os casos em que os algarismos, do 1 ao 9, também figuram uma e uma só vez em cada uma das 9 regiões. Ficamos reduzidos a um número com 22 algarismos. Se retirarmos desta contagem os quadrados que se obtêm uns dos outros por rotação ou reflexão, o valor é reduzido a um número com 10 algarismos: 5 472 730 538! Estas são todas as soluções possíveis. A partir de cada solução, podemos criar vários desafios de Sudoku. Basta, para isso, deixar um número variável de casas por preencher de início.

Para cada grelha parcialmente preenchida com algarismos, três situações podem ocorrer: não há solução; existe uma só solução; ou é possível encontrar várias soluções. De notar que um desafio de Sudoku, para se considerar válido, deverá ter uma única solução. E qual o menor número de algarismos que é necessário apresentar de início de forma a que possa construir um desafio com uma só solução? Os desafios de Sudoku tradicionais costumam apresentar cerca de 25 algarismos. Até à data, ninguém foi capaz de criar um desafio de Sudoku (de solução única) com menos de 17 algarismos impressos de início, mesmo com a ajuda de computadores potentes. Há quem se dedique a colecionar desafios de Sudoku com 17 algarismos impressos: esse valor já está próximo dos 50 000 desafios!

Terminamos com algumas sugestões (Figuras 5 e 6) sobre diferentes momentos do dia em que, de forma inesperada, poderemos ser convidados a resolver um destes viciantes quebra-cabeças!