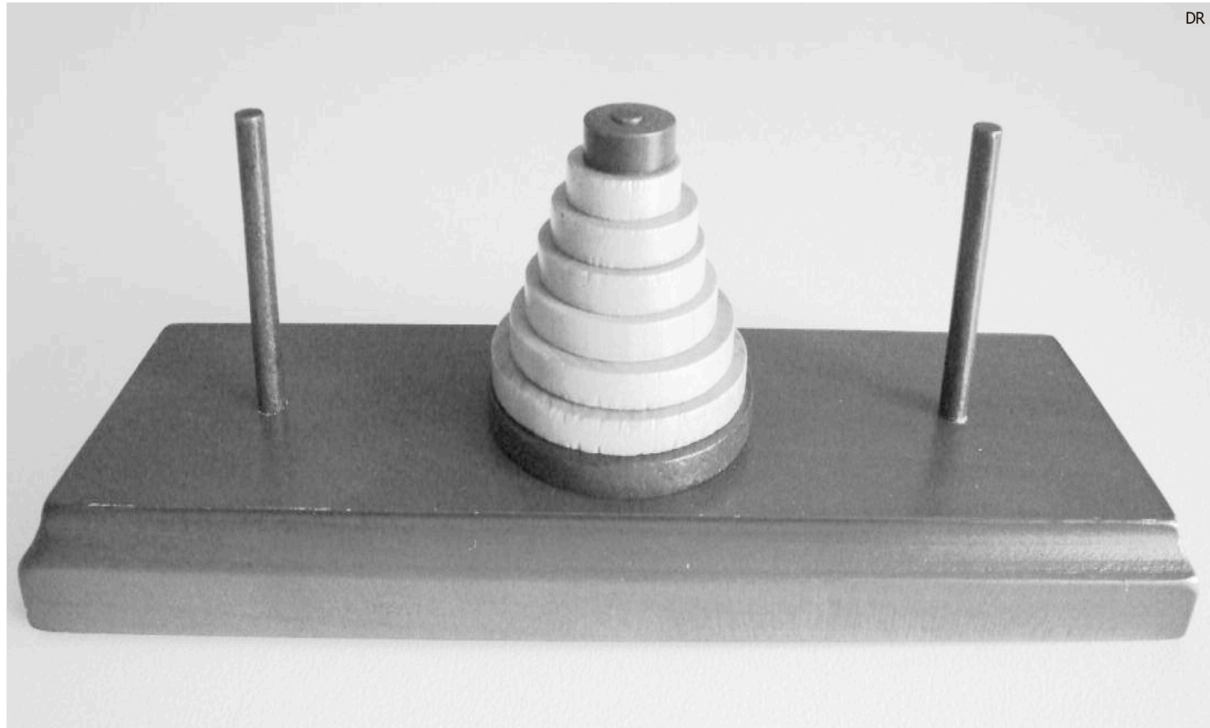
# A torre de Hanói, o fim do mundo e a Matemática

**Ricardo Cunha Teixeira**

Sendo a Matemática a ciência dos padrões, é natural que a encontremos nas mais variadas situações do dia a dia. Muitas vezes, nem estamos à espera. O recurso a ferramentas matemáticas pode mesmo ser decisivo em muitas dessas situações. Neste artigo, apresento um exemplo de como é possível explorar diversos conceitos matemáticos a partir de um simples jogo: a torre de Hanói.

Desde os primórdios da Humanidade, o jogo tem feito parte da vida do ser humano e as suas potencialidades lúdicas e pedagógicas têm despertado grande interesse e fascínio. Para além da evidente componente competitiva, muitos jogos apresentam regras que permitem estimular o raciocínio lógico-matemático e possibilitam a modelação de situações reais ou imaginárias. Mesmo para aqueles jogos que aparentemente não têm como objetivo a exploração de temas matemáticos concretos, uma investigação detalhada pode revelar-se de extrema utilidade em termos matemáticos.

Na Torre de Hanói, dispomos de três hastes e de vários discos de forma circular, com raios de medida diferente perfurados no centro. No início do jogo, os discos estão empilhados sobre uma das hastes (ver figura). O objetivo é deslocar todos os discos da haste inicial para uma das outras duas, respeitando as seguintes regras: (a) só se pode deslocar um disco de cada vez de uma das hastes para qualquer outra; esta operação designa-se por deslocamento; (b) um disco nunca pode ser colocado por cima de outro de diâmetro inferior. Além disso, o objetivo deve ser concretizado usando o menor número possível de deslocamentos. E qual será esse número? Obviamente que a resposta depende da quantidade inicial de discos.




A exploração da Torre de Hanói tem a grande vantagem de poder ser adaptada a cada um dos níveis de ensino, do Básico ao Secundário, permitindo a construção de caminhos de investigação específicos para cada caso. Um caminho possível de investigação pode passar por explorar o desafio apresentado pelo jogo de forma recursiva. Em traços gerais, trata-se de uma maneira especial de resolver problemas em que a ideia chave é definir regras para formular casos complexos em termos de casos mais simples. Ou seja, em vez de se começar a resolver o problema com um número elevado de discos, por que não tentar simplificar a situação apresentada usando poucos discos? E, nesse caso, qual a situação mais simples que pode ser analisada?

A resposta é clara e conduz-nos a outra pergunta: se tivermos apenas um disco, qual o menor número de deslocamentos de forma a levar esse disco de uma haste para outra? É necessário apenas um único deslocamento. E se agora tivermos dois discos e não apenas um? Neste caso, são necessários 3 deslocamentos: o disco de menor diâmetro deve ser colocado sobre uma das hastas vazias; de seguida, o de maior diâmetro sobre a outra haste vazia (como tem diâmetro superior ao primeiro disco, não pode ser colocado na haste ocupada pelo primeiro); por fim, o primeiro disco, de menor diâmetro, é colocado sobre o segundo e o problema fica resolvido! Conseguimos deslocar a torre de dois discos de uma haste para outra respeitando as regras do jogo com apenas 3 deslocamentos.

Lança-se novo desafio: e se tivermos uma torre com três discos? Seguindo um raciocínio análogo, chega-se à conclusão que, no mínimo, são necessários 7 deslocamentos: sabemos que mover dois discos para uma das hastes envolve necessariamente 3 deslocamentos; em seguida, movemos o novo disco para a haste livre e, finalmente, para deslocar os dois discos para essa haste precisamos novamente de mais 3 deslocamentos; ao todo, são 2x3+1=7 deslocamentos! Este raciocínio conduziu à descoberta de um padrão. O poder da Matemática, enquanto ciência, reside precisamente na descoberta de padrões. Senão, vejamos: já não precisamos de mover as peças do jogo para descobrir o número mínimo de deslocamentos necessário para mover quatro discos. A resposta é clara: 2x7+1=15 deslocamentos. E para mover cinco discos? São necessários 2x15+1=31 deslocamentos, e assim sucessivamente. Em consequência da descoberta de um padrão, a passagem do concreto para o abstrato é perfeitamente natural: sendo n um número natural qualquer, qual o número mínimo de deslocamentos necessário para mover n+1 discos? A resposta é precisamente esta: o dobro do número mínimo de deslocamentos para mover n discos mais uma unidade.

Obtivemos, assim, uma sequência numérica definida por recorrência: 1, 3, 7, 15, 31, … Cada termo é o dobro do anterior, mais uma unidade. Também é possível definir esta sequência através do seu termo geral. Se representarmos por d(n) o número mínimo de deslocamentos necessário para mover n discos, tem-se d(n)=2^n-1. Esta igualdade é válida para todo o número natural n. Por exemplo, se n=1, então d(1)=2^1-1=2-1=1; se n=2, então d(2)=2^2-1=4-1=3; se n=3, então d(3)=2^3-1=8-1=7; e assim sucessivamente. Esta é uma excelente oportunidade para explorar as propriedades da função exponencial, um dos temas abordados no Ensino Secundário.

Muitos outros aspetos podem ser explorados partindo deste jogo. Vejamos uma última curiosidade. A Torre de Hanói foi publicada pela primeira vez pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1883. Curiosamente, o folheto original continha a seguinte lenda: "Conta-se que no grande templo de Benares, debaixo da cúpula que marca o centro do mundo, existe uma placa de bronze e três agulhas de diamante. Durante a criação, Deus colocou numa dessas agulhas 64 discos de ouro sobrepostos uns nos outros, o maior descansando sobre a laje de bronze e os restantes de dimensão sucessivamente inferior até ao topo. Durante noite e dia, sacerdotes permanecem ocupados a transferir os discos para outra agulha de diamante, sem infringir as regras sagradas e imutáveis: não se pode mover mais do que um disco de cada vez e só se pode colocar um disco numa agulha desocupada ou sobre um disco maior do que ele. Quando os 64 discos forem transferidos da agulha em que o Criador os colocou para a nova agulha, o templo desmoronar-se-á em pó e esse momento marcará o fim do mundo."

O leitor pode ficar descansado pois, se fizermos as contas, para chegar ao fim do mundo são necessários d(64)=2^(64)-1 deslocamentos, ou seja, mais de 18 triliões de movimentos!

*Departamento de Matemática da Universidade dos Açores, rteixeira@uac.pt*