Espelho meu, espelho meu: há algum padrão mais simétrico do que eu?

Ricardo Cunha Teixeira

Ao longo dos últimos meses, tive a oportunidade de partilhar com o leitor diversos artigos sobre a forma como podemos classificar os padrões em nosso redor de acordo com o seu grupo de simetria. A pretexto dos mais variados temas, desde as calçadas e varandas ao artesanato e às pavimentações em azulejo, muitas foram as oportunidades para olhar com atenção para aspetos que passam despercebidos no dia a dia.

A classificação desses padrões (entendidos como figuras do plano) tem por base os quatro tipos de simetria do plano: simetria de reflexão em reta (associada a uma reta, chamada eixo de simetria); simetria de rotação (associada a um ponto, chamado centro de rotação, e a uma determinada amplitude); simetria de translação (associada a um vetor, com uma determinada direção, sentido e comprimento); e simetria de reflexão deslizante (que resulta da composição de uma reflexão em reta com uma translação de vetor paralelo a essa reta; a reta designa-se por eixo de deslocamento). Encontramos diariamente estes quatro tipos de simetria: simetria de reflexão em reta (quando, por exemplo, nos olhamos ao espelho ou quando observamos uma imagem refletida num lago); simetria de rotação (num catavento e nas velas de um moinho); simetria de translação (nos pavimentos e nas varandas, quando há um motivo que se repete sucessivamente numa determinada direção); simetria de reflexão deslizante (nas nossas pegadas ao caminharmos descalços na areia).

Uma das grandes vantagens de utilizar ferramentas matemáticas para interpretar a realidade que nos rodeia tem a ver o poder de síntese da Matemática - a ciência dos padrões. Em particular, podemos classificar de forma rigorosa as figuras do plano quanto ao seu grupo de simetria. Estas podem ser rosáceas (quando não existem simetrias de translação), frisos (quando existem simetrias de translação numa única direção) ou papéis de parede, também designados por padrões periódicos (quando existem simetrias de translação em mais de uma direção, o que tem como consequência a pavimentação de todo o plano). A grande maioria dos exemplos apresentados ao longo dos últimos meses enquadra-se nos dois primeiros tipos. Nas calçadas, nas varandas e no artesanato analisaram-se muitos exemplos de rosáceas e de frisos.

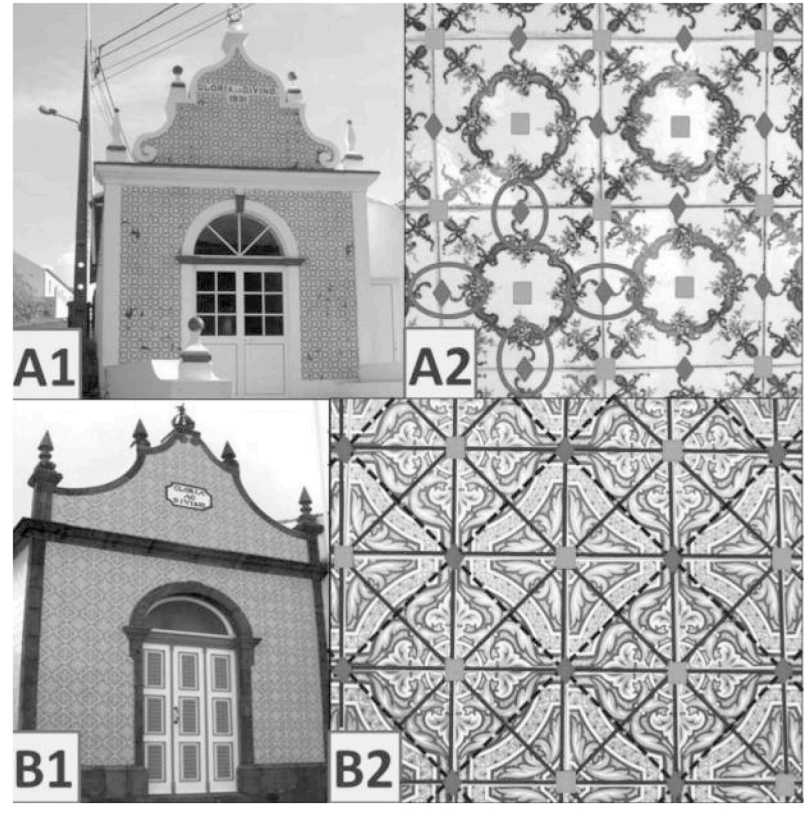
A propósito, informo o leitor que todas as 9 ilhas do Arquipélago dos Açores já foram contempladas com pelo menos um roteiro de simetria das suas calçadas. Os roteiros em formato PDF estão disponíveis em http://sites.uac.pt/rteixeira/simetrias/, para além de alguns textos de apoio, de fluxogramas de classificação das rosáceas e dos frisos e de muitas notícias que foram publicadas nos últimos meses. Esta iniciativa insere-se nas celebrações do Ano Internacional da Matemática do Planeta Terra 2013.

Neste artigo, analisamos dois padrões periódicos: comparamos as simetrias das pavimentações em azulejo de dois Triatos do Divino Espírito Santo, localizados nas freguesias de Praia do Almoxarife (A1) e de Castelo Branco (B1), na ilha do Faial. Estamos na presença de padrões periódicos pois existem simetrias de translação em mais de uma direção. Em A2 e B2, se arrastarmos todo o plano segundo diferentes direções (por exemplo, na horizontal e na vertical), conseguimos sobrepor por completo a figura transformada à figura inicial. Os motivos repetem-se em diferentes direções e, para cada direção, as cópias do motivo apresentam sempre o mesmo espaçamento entre si. Analisam-se, de seguida, outros tipos de simetria.

Em ambos os casos, identificamos simetrias de rotação de 90 graus (os centros estão representados em A2 e B2 por pequenos quadrados). Isto significa que, se rodarmos todo o plano em torno desses centros de rotação segundo uma amplitude de 90 graus ou de algum dos seus múltiplos (180 graus, 270 graus ou 360 graus, correspondendo a última situação à identidade ou rotação trivial de 0 graus), a figura transformada sobrepõe-se por completo à figura inicial. Também é possível identificar nas duas figuras outros centros de rotação, representados por pequenos losangos, que correspondem a rotações de 180 graus. Até agora temos um empate relativamente aos tipos de simetria dos dois padrões "a concurso".

Na verdade, a existência de simetrias de reflexão em reta e de reflexão deslizante permite desempatar os dois exemplos, com clara "vitória" para o padrão de Castelo Branco, isto porque apenas

DR



este padrão apresenta os dois tipos referidos de simetria. De facto, se "dobramos" o plano ao longo de cada uma das retas representadas com traço contínuo em B2, notamos que há uma sobreposição completa das duas partes do plano. A utilização de um espelho com o bordo assente em cada uma dessas retas permite retirar a mesma conclusão. Já em A2 isso não acontece (repare-se, em particular, nos pormenores assinalados em A2). Por fim, se o leitor olhar com atenção para as retas representadas a tracejado em B2, pode constatar que a aplicação de uma reflexão em reta seguida por uma translação de vetor paralelo a essa reta, permite sobrepor por completo a figura transformada à figura inicial. Por exemplo, se fixar uma das retas a tracejado, representadas na diagonal, e acompanhar com o olhar a forma como se repete a flor, alternadamente à esquerda e à direita da reta, chegará à conclusão que essa repetição se assemelha às marcas deixadas pelas nossas pegadas na areia.

Note-se também que, por cada centro de rotação de 90 graus, passam 4 eixos de simetria e, por cada centro de rotação de 180 graus, passam 2 eixos de simetria e 2 eixos de deslocamento. Como o leitor pode constatar, a análise das simetrias de um padrão periódico tem muito que se lhe diga!