Universidade dos Açores

Departamento de Ciências da Educação

Licenciatura em Educação Básica

Aplicações da Matemática

Os números de Fibonacci e a Razão Áurea

Docente: Prof. Doutor Ricardo Teixeira

Discentes: Natália Pina Pedro, Raquel Furtado e Vanessa Amaral

21 de dezembro de 2012

Índice

- Quem foi Fibonacci?;
- A sequência de Fibonacci;
- A Razão Áurea;
- O Retângulo de Ouro;
- Fibonacci ao nosso redor;
- Bibliografia.

Quem foi Fibonacci?

- Leonardo de Pisa nasceu na cidade de Pisa, por volta de 1175;
- O seu pai era um mercador italiano que viajava para o Médio Oriente. A profissão do pai permitiu-lhe viajar com frequência, onde se familiarizou com o sistema de numeração hindu-árabe. Em 1202, Fibonacci escreveu o seu livro, *Liber Abaci* (*Livro do Ábaco*), onde mostra como aplicar este sistema de numeração.

A Sequência de Fibonacci

- *Liber Abaci* foi o livro mais famoso que o matemático escreveu. Neste livro, Fibonacci coloca problemas da vida real, mas com resoluções mais abstratas e apresentou novas técnicas de cálculo.

Sucessão de Fibonacci

- Os primeiros 20 termos da sequência de Fibonacci são os seguintes:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765,...

A Sequência de Fibonacci

- Propriedades dos números de Fibonacci:

1. A soma de dez números consecutivos de Fibonacci é divisível por 11.

Exemplo 1:	Exemplo 2:
F1 – 1	F11 - 89
F2 – 1	F12 - 144
F3 – 2	F13 - 233
F4 – 3	F14 - 377
F5 – 5	F15 - 610
F6 – 8	F16 - 987
F7 – 13	F17 - 1597
F8 – 21	F18 - 2584
F9 – 34	F19 - 4181
F10 – 55	F20 – 6765

Soma do exemplo 1:
1+1+2+3+5+8+13+21+34+55=143; 143/11=13

Soma do exemplo 2:
89+144+233+377+610+987+1597+2584+4181+6765=17567; 17567/11=1597

A Sequência de Fibonacci

- Propriedades dos números de Fibonacci:

2. Dois números consecutivos de Fibonacci não têm factores em comum;

Exemplo 1:

8	2
4	2
2	2

13	13
1	

$8=2^3$

$13=13$

Exemplo 2:

610	2
305	5
61	61
1	

987	3
329	7
47	47
1	

$610=2x5x61$

$987=3x7x47$

A Sequência de Fibonacci

- Propriedades dos números de Fibonacci:

3. Um termo da sequência de Fibonacci cuja ordem é um número primo (ex: F1, F2, F3, F5, F7, …) é igualmente um número primo.

Exemplo 1:

F5 – 5

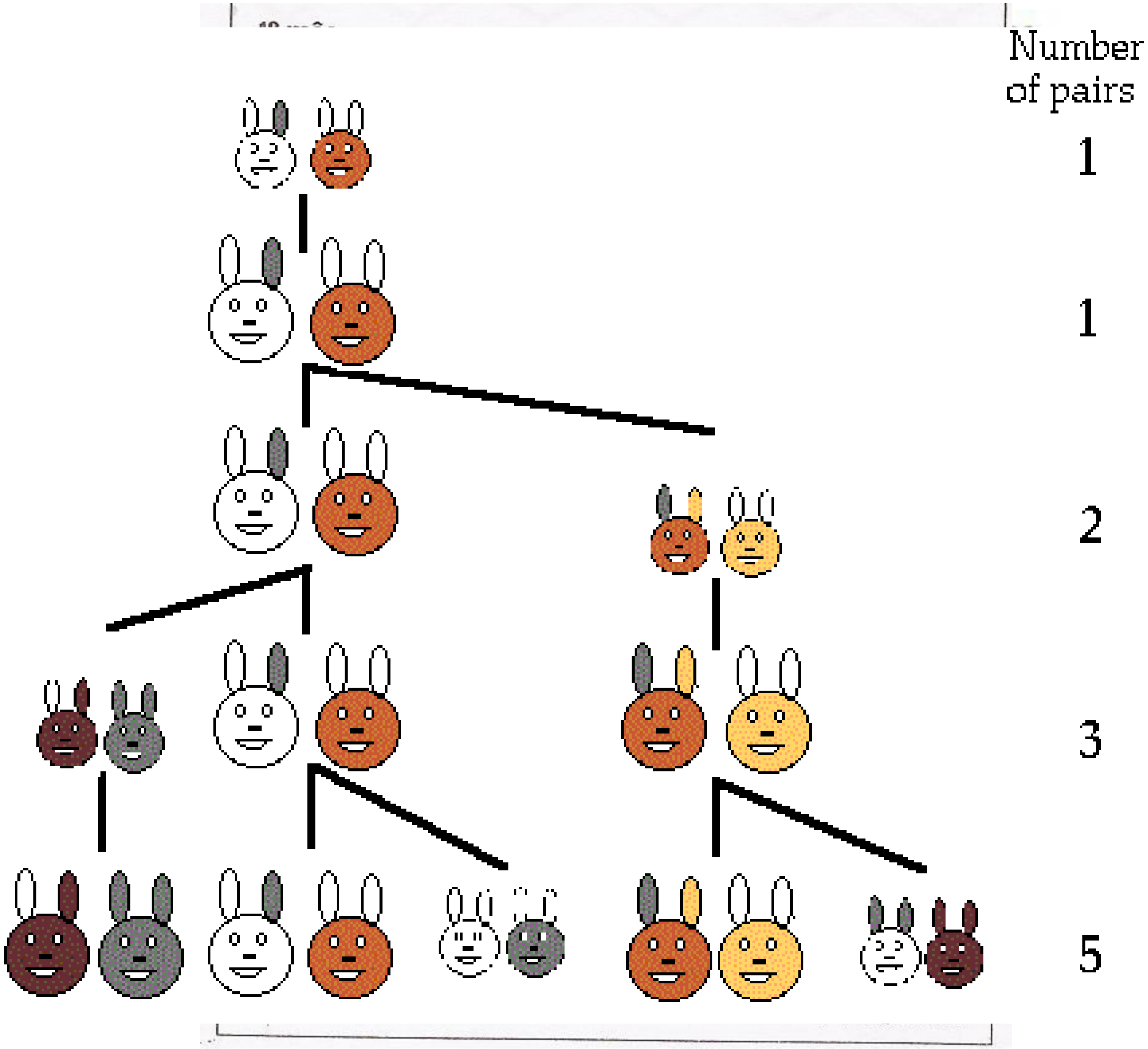
Exemplo 2:

F13 – 233

Problema dos Coelhos

Num pátio fechado coloca-se um casal de coelhos. Supondo que nenhum morre e que em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, ao fim de um ano, quantos casais de coelhos estão no pátio?

Problema dos Coelhos



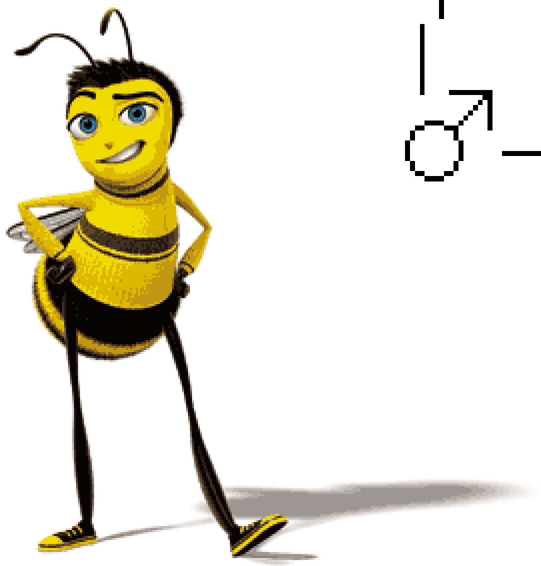
Fontes: *A Espiral Dourada*, *The (Fabulous) Fibonacci Numbers*
e *http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html*

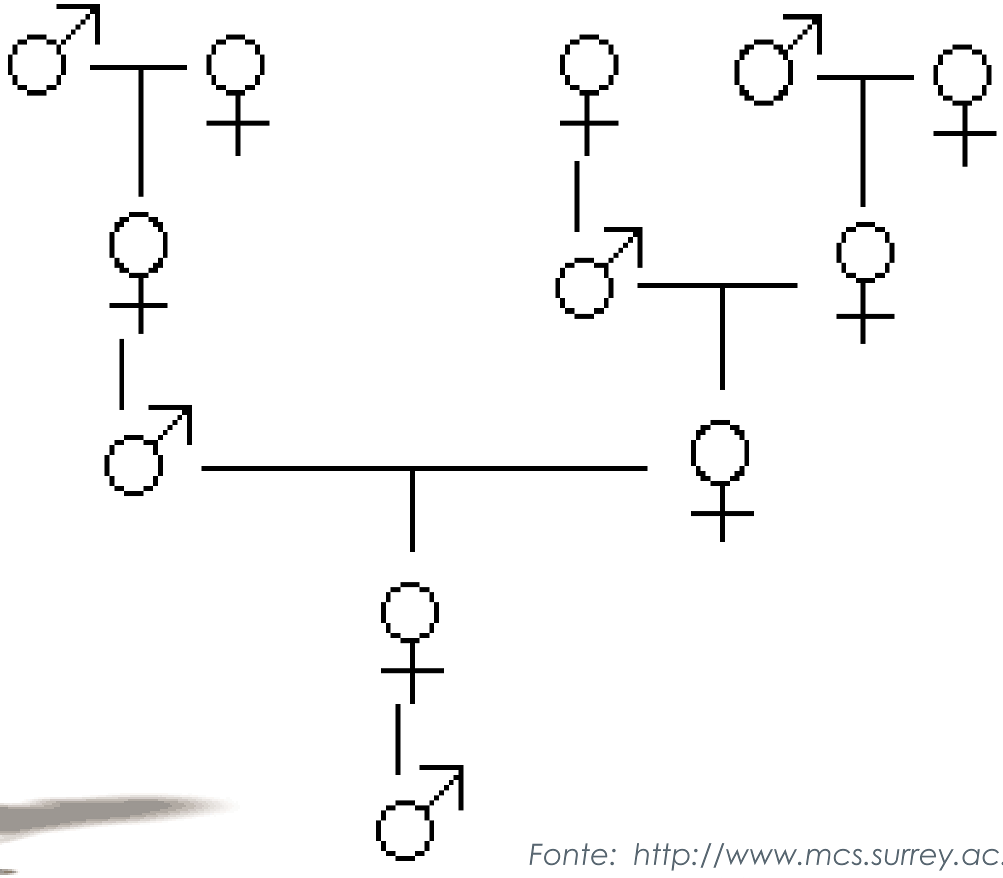
Árvore genealógica dos Zangões

1. Há uma fêmea especial chamada rainha;
2. Há muitas fêmeas operárias que, ao contrário da rainha, não produzem ovos;
3. Os zangões provêm de ovos não fertilizados. Os zangões têm portanto mãe, mas não têm pai;
4. Todas as fêmeas são produzidas a partir de ovos fertilizados, logo têm mãe e pai;
5. A generalidade das fêmeas são operárias, mas algumas são alimentadas com uma substância especial chamada geleia real e transformam-se em rainhas.

Árvore genealógica dos Zangões

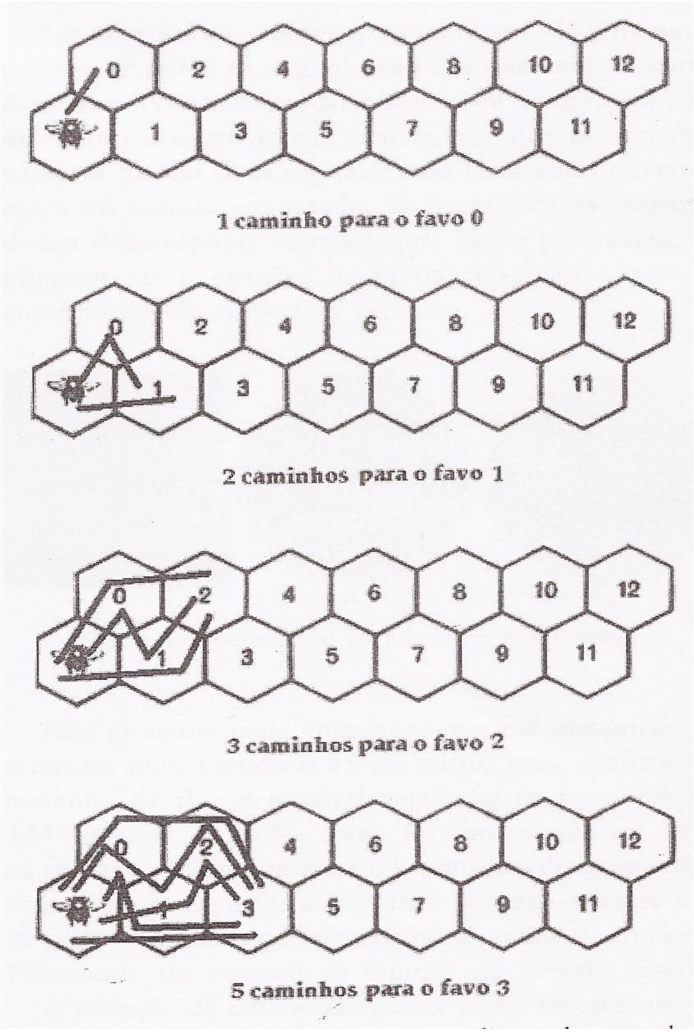
- Quantos tetravós tem um zangão?





Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html

Caminhos ao dispor de uma abelha



Fonte: *A Espiral Dourada, p.93*

Razão Áurea

- Ao dividirmos cada termo da sequência de Fibonacci pelo termo anterior a razão irá aproximar-se de um certo valor: o número de ouro;
- O número de ouro, também conhecido como rácio dourado ou proporção divina representa-se pela letra grega Phi Φ e é considerado o símbolo da harmonia;
- É um número irracional dado pela dízima infinita não periódica:

1,618 033 989 ...

Razão Áurea

- Corresponde a metade da adição da raíz quadrada de cinco com a unidade;

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\,033\,989\ \ldots$$

Razão Áurea

- Deste modo temos:

F2/F1= 1; F3/F2= 2; F4/F3= 1,5

F5/F4= 1,6(6); F6/F5= 1,6

- Se continuarmos obteremos a seguinte sequência de números: 1,625 000; 1,615 385; 1,619 048; 1,617 647; 1,618 182; 1,617 978; 1,618 056; 1,618 026; 1,618 037; 1,618 033; …

Razão Áurea

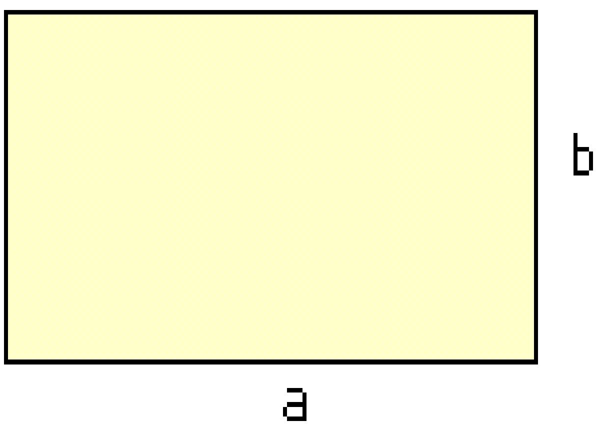
- Então podemos concluir que:

F_{n+1}/F_n aproxima-se cada vez mais do número de ouro;

- A presente expansão decimal prolongar-se-á sem nunca se repetir, uma vez que Phi, Φ, é um número irracional.

Retângulo de Ouro

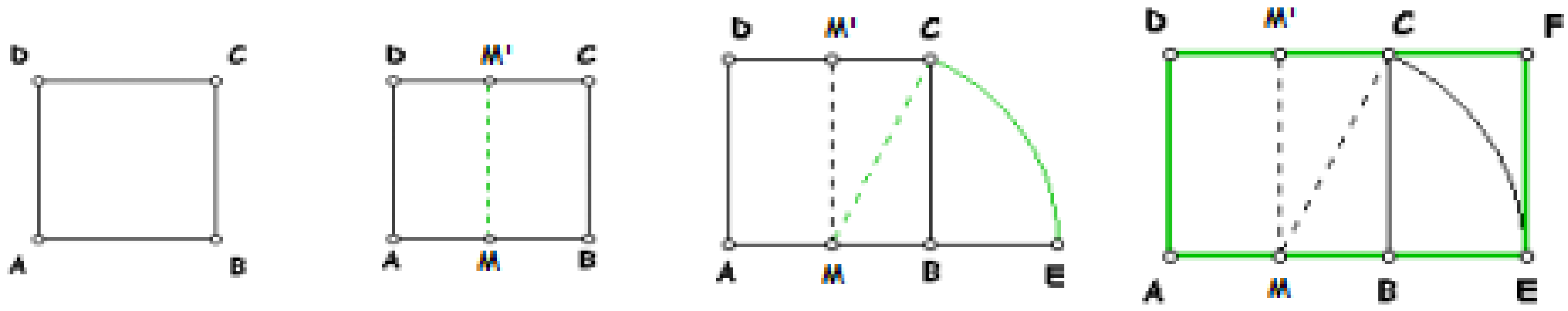
- Se num retângulo dividirmos a medida de comprimento do lado maior pela do menor e o resultado for **Phi**, dizemos que estamos perante um **Retângulo de Ouro**. De acordo com os padrões estéticas da antiga Grécia, o retângulo de ouro apresenta a proporção perfeita.



$$\frac{a}{b} = \Phi$$

Construção de um Retângulo de Ouro

- Desenha-se um quadrado [ABCD] e marca-se o ponto médio (M) de um dos seus lados.
- A seguir, traça-se um segmento de reta desde este ponto (M) até ao vértice do lado oposto (C). Finalmente, utilizando um compasso, traça-se um arco de circunferência, marcando-se sobre o lado inicial (que contém M) aquela distância.
- Assim se obtém o lado maior, [AE], do retângulo de ouro.

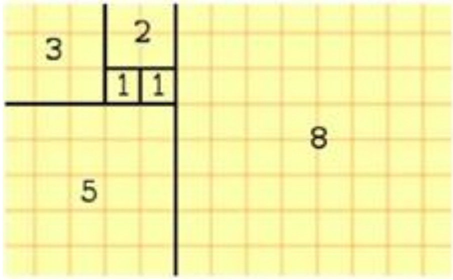


Retângulo de Ouro

- O **Retângulo de Ouro** é considerado o formato retangular mais belo e apropriado de todos, exemplo disso é o uso deste formato nos cartões de crédito e em algumas televisões.

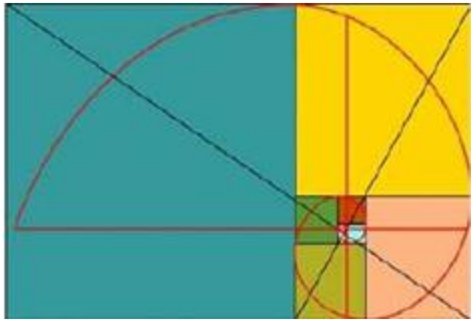
Retângulo de Ouro

- Podemos construir retângulos de ouro recorrendo a papel quadriculado:

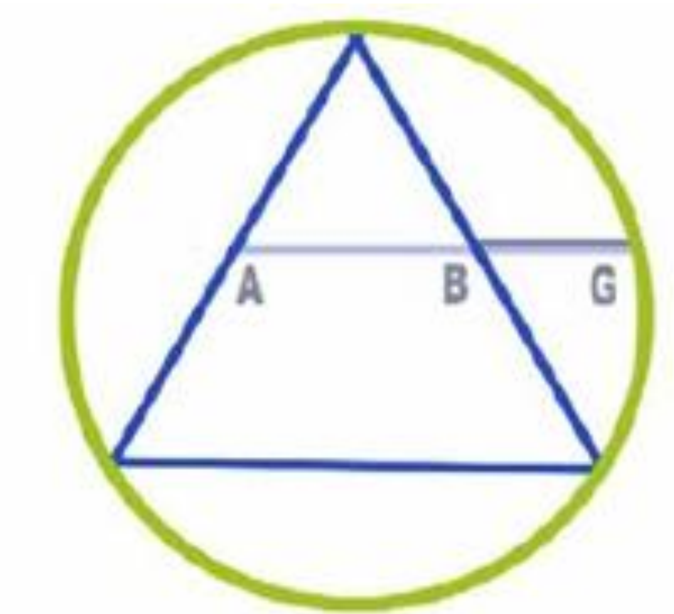


- Podemos construir uma espiral a partir do esquema anterior, como é expresso na figura abaixo:

Espiral de Fibonacci



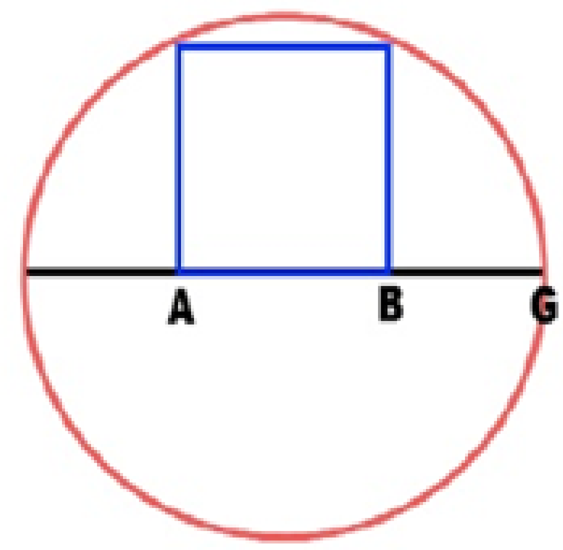
… Na Geometria



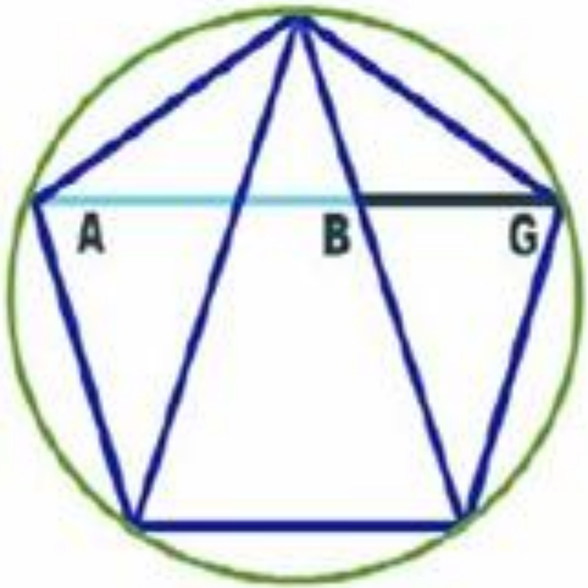
- Considerando um triângulo equilátero inscrito numa circunferência, assinalando os pontos médios A-B e estendendo a linha reta até cruzar com o círculo (G), encontramos o número Phi através do cálculo AB:BG

... Na Geometria

- Construindo um quadrado inscrito num semicírculo, assinalando os vértices A e B do quadrado que pertencem à reta que passa pelo centro da circunferência e prolongando até cruzar com a circunferência (G), encontramos o número Phi através do cálculo AB:BG



… Na Geometria



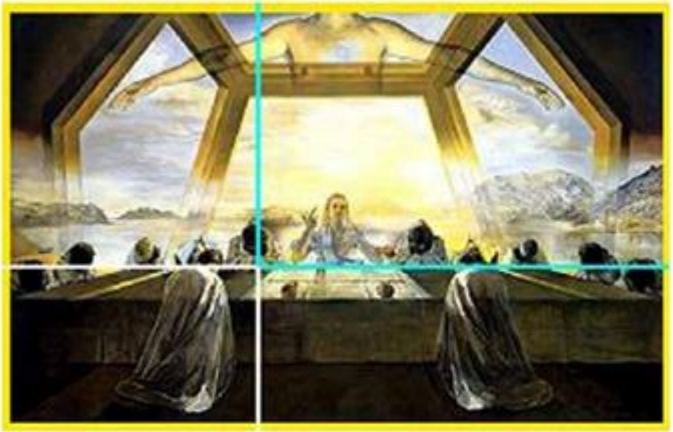
- Considerando um pentágono regular inscrito numa circunferência, assinalando os pontos A-B e marcando uma reta até à circunferência (G), encontramos o número Phi no cálculo AB:BG.

Fibonacci ao nosso redor

… Na Arte

- É bastante frequente encontrar a Proporção Áurea em pinturas renascentistas ou em grandes obras de arte, como por exemplo:

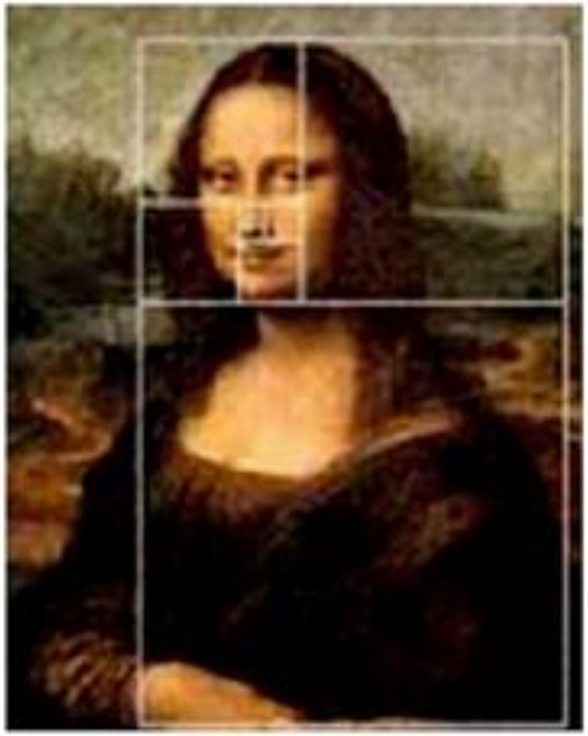
Nascimento de Vénus de Boticelli



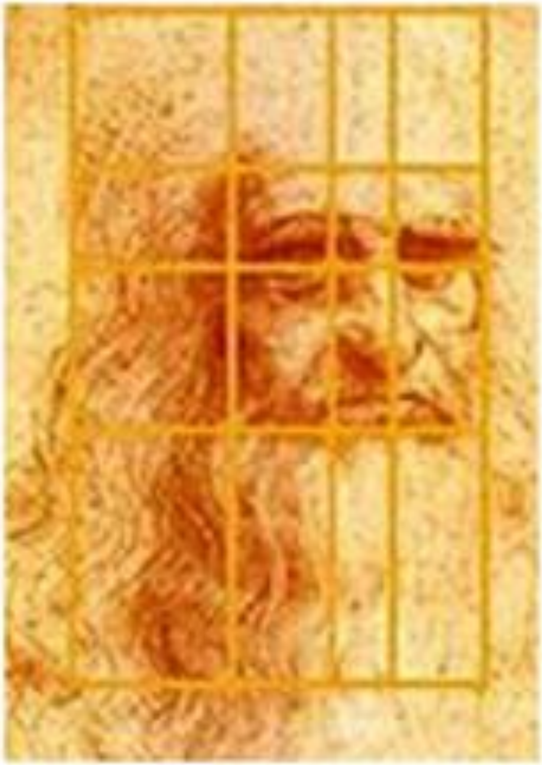
Sacramento da Última Ceia, de Salvador Dalí

... Na Arte

MonaLisa

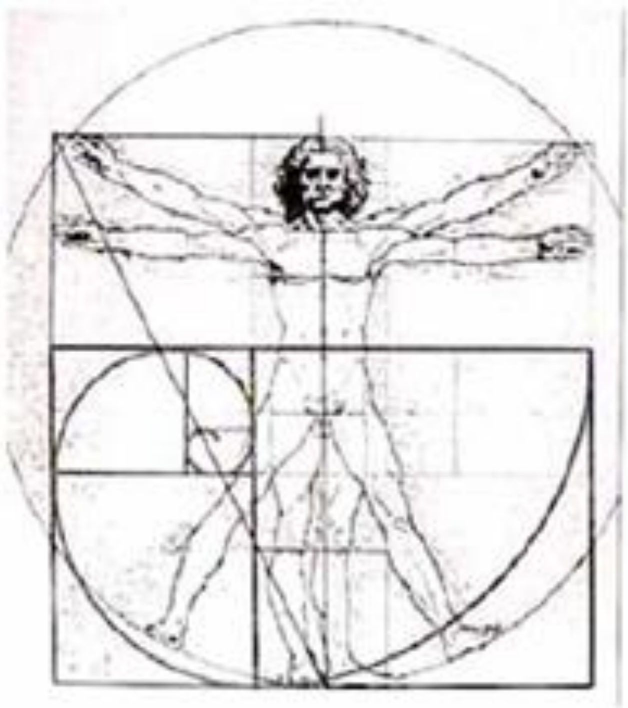


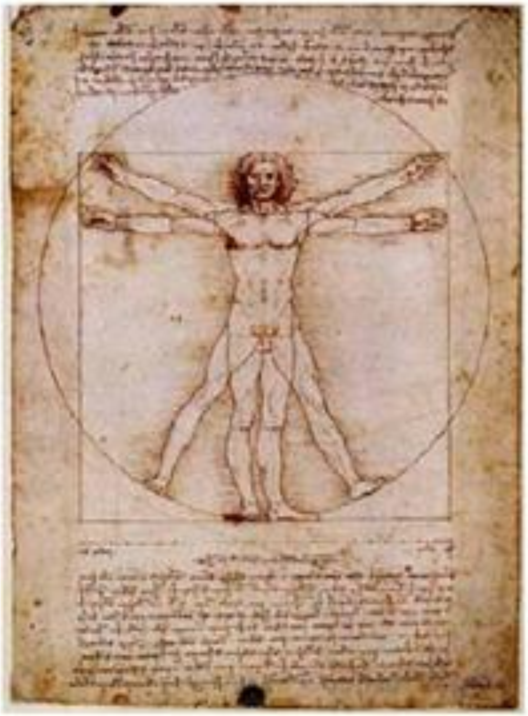
Autoretrato de Leonardo DaVinci



… Na Arte

O HOMEM DE VITRUVIO





… Na Arquitetura

- Grandes projetos arquitetónicos utilizaram a proporção áurea nas suas decorações;

- O **Retângulo de Ouro** foi apropriado em grandes construções desde a Antiguidade até aos dias de hoje.

… Na Arquitetura

Pirâmide de Queóps

- Cada bloco da pirâmide era 1,618 vezes maior que o bloco do nível logo acima.

- As câmaras no interior das pirâmides também seguiam essa proporção, de forma que os comprimentos das salas fossem 1,618 vezes maiores que as larguras.

… Na Arquitetura

O Pártenon

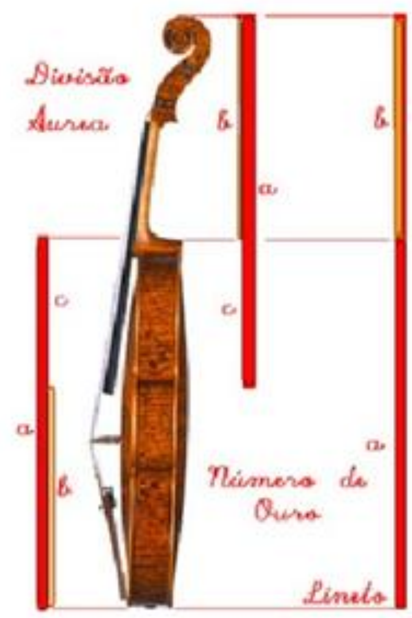
Construção grega que resistiu parcialmente ao tempo e onde são notadas inúmeras presenças da razão áurea.

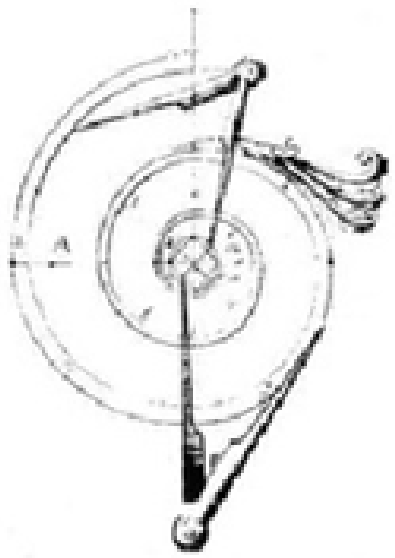
… Na Arquitetura

- As formas áureas sempre foram utilizadas e adoradas por grandes artistas. Podemos encontrá-las em grandes monumentos e até (provavelmente) nas varandas de ruas vizinhas…

… Na Música

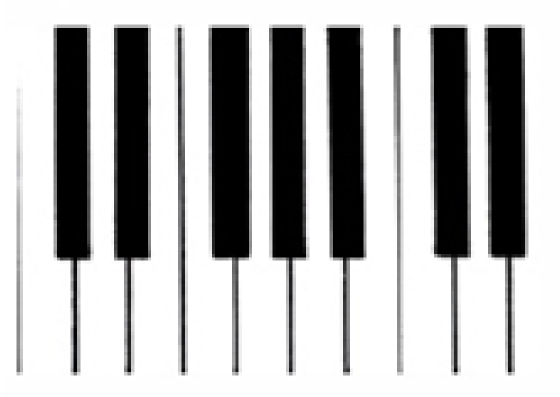
Os amantes da música podem ficar a saber que mesmo Stradivarius utilizava o número de ouro na construção dos seus famosos violinos…





… Na Música

- No caso do piano, são 8 teclas brancas e 5 pretas separadas em grupos…



… Na Literatura

- Na literatura, o número de ouro encontra a sua aplicação mais notável no poema épico grego Ilíada, de Homero, que narra os acontecimentos dos últimos dias da Guerra de Tróia.
- Quem ler notará que a proporção entre as estrofes maiores e as menores dá um número próximo de 1,618, o número de ouro.

… No Universo

- Em todo o Universo, a Proporção Áurea está omnipresente, como por exemplo nas formas de algumas galáxias…

… Na Natureza

- É possível encontrar os números de Fibonacci nas copas das árvores ou até mesmo no número de pétalas das flores;

- Podemos também observar a espiral de Fibonacci nas sementes das flores, em frutos e pinhas.

… Na Natureza

… Na Natureza

Uma pétala

Uma pétala

Cinco pétalas

Cinco pétalas

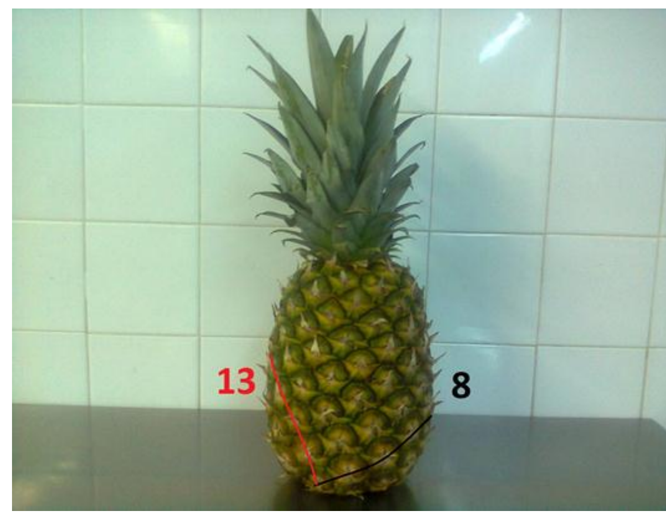
Cinco pétalas

Cinco pétalas

Três ramos

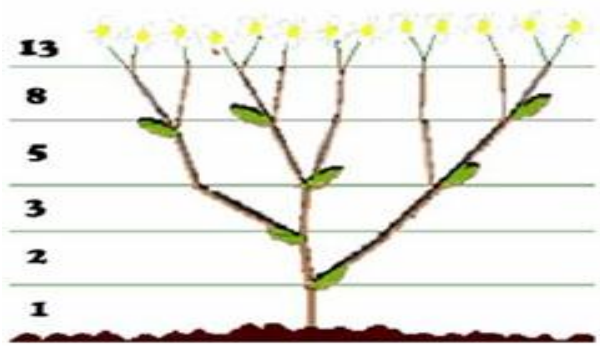
… Na Natureza

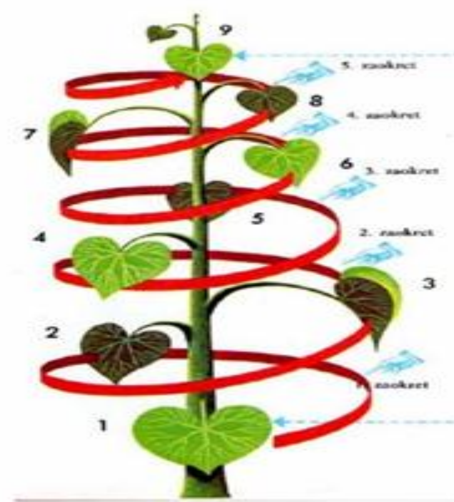
- O número de espirais de Fibonacci pode ser encontrado em muitas outras formas vegetais como as folhas das cabeças das alfaces, a couve-flor, aloé-vera, camadas das cebolas ou os padrões de saliências do ananás/abacaxi e das pinhas, como se pode ver nestas figuras:



… Na Natureza

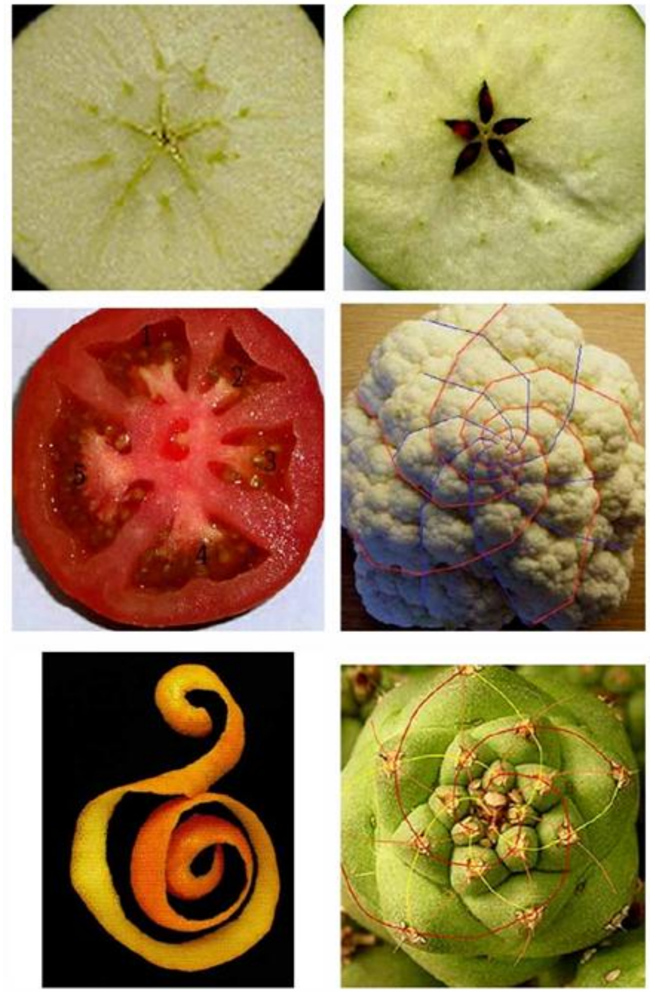
- Muitas plantas mostram os números da sucessão de Fibonacci nos seus “pontos de crescimento”.
- Quando a planta tem um novo rebento, leva dois meses a crescer até que que as ramificações fiquem suficientemente fortes. Se a planta ramifica todos os meses, depois disso, no ponto de ramificação, obtemos uma figura semelhante às de baixo:





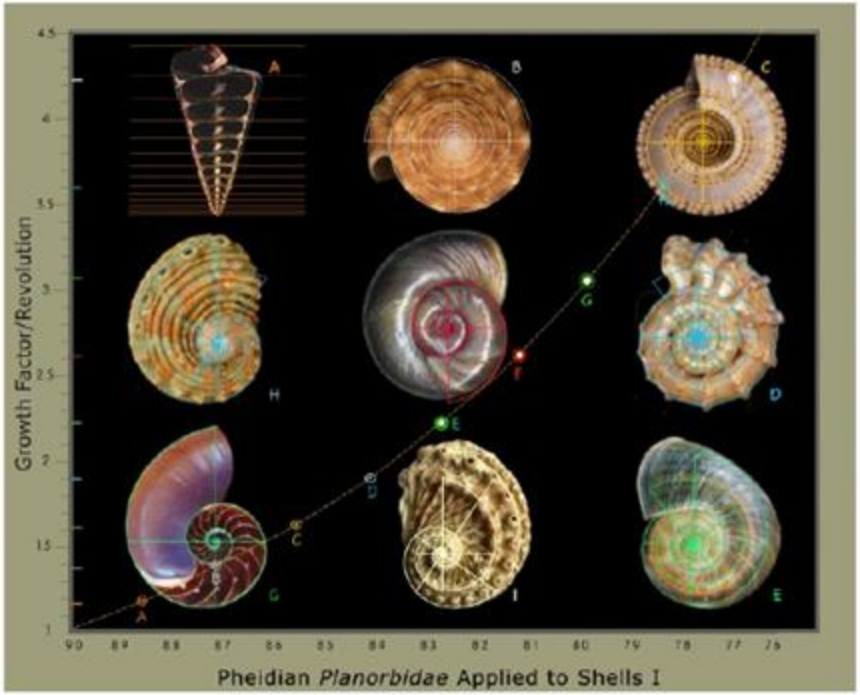
… Na Natureza

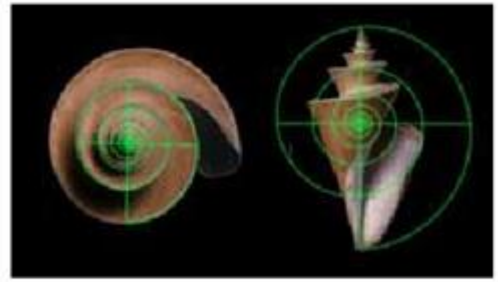
- Na fruta também encontra-se presente este fenómeno.

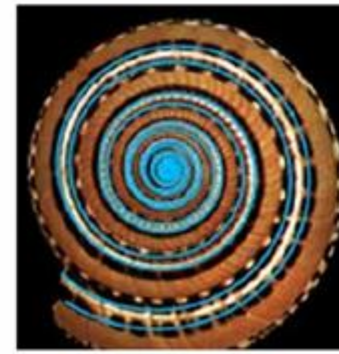


… Na Natureza

- Fósseis





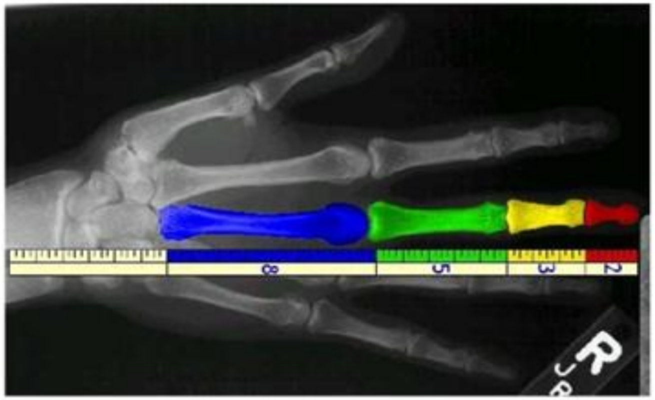


… Na Natureza

- A espiral de Fibonacci pode ser visualizada nos chifres de alguns animais:

… No Ser Humano

- As medidas das nossas articulações, resultam no número Phi. Já o número de ossos segue o padrão de números de Fibonacci.



- Se medirmos os ossos de forma crescente e dividirmos uma medida pela sua antecessora, iremos encontrar o número Phi, algo em redor de 1,618…

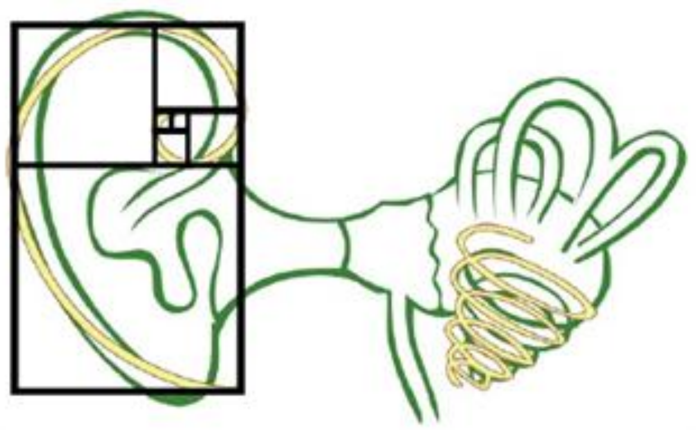
… No Ser Humano

- Os nossos dentes enquadram-se na Proporção Áurea;

- A espiral de propagação capilar ou as medidas de largura e comprimento das nossas unhas constituem outros exemplos…

... No Ser Humano

- A nossa orelha e tímpano segue um formato idêntico à espiral de Fibonacci, tal e qual como as medidas comparativas entre as divisões físicas de cada elemento auditivo.



Bibliografia

- CRATO, N. (2008). *A Matemática das Coisas*. Gradiva;
- CRATO, N. et al (2006). *A Espiral Dourada*. Gradiva;
- POSAMENTIER, A. S. et al (2007). *The (Fabulous) Fibonacci Numbers*. Prometheus Books;
- GARLAND, T. (1998). *Fibonacci Fun: Fascinating Activites with Intriguing Numbers*. Dale Seymour Publications;

Webgrafia - Imagens

- http://www.slideshare.net/DiogoFernandes/srie-de-fibonacci-e-o-nmero-de-ouro
- http://www.slideshare.net/pedrotecmid/leonardo-da-vinci-proporo-urea-presentation#btnNext
- http://www.slideshare.net/fragoso7/o-numero-de-ouro
- http://www.slideshare.net/josemiguel0407/nmero-de-ouro-3670858
- http://www.slideshare.net/DiogoFernandes/srie-de-fibonacci-e-o-nmero-de-ouro-3598303
- http://www.slideshare.net/JadersonNascimento/o-nmero-de-fibonacci
- http://www.slideshare.net/JadersonNascimento/o-nmero-de-fibonacci#btnNext
- http://www.slideshare.net/josemiguel0407/nmero-de-fibonacci
- http://www.slideshare.net/ritapereira/fibonacci-e-o-cdigo-da-vinci-1044332#btnNext